

# El método de correlación cruzada de matrices y la generación de un campo de desplazamientos para pequeñas esferas



**J. D. Bulnes**

*Grupo de Mecânica Quântica, Informação Quântica e Física Aplicada, Universidade Federal do Amapá, Rod. Juscelino Kubitschek, Km. 2, Jardim Marco Zero, CEP. 68903-419, Macapá, AP, Brasil.*

**E-mail:** bulnes@unifap.br

(Recibido el 19 de Abril de 2013, aceptado el 27 de Agosto de 2013)

## Resumen

En este artículo utilizamos el método de correlación cruzada para construir un campo de desplazamiento a partir de un conjunto de imágenes digitales (matrices) que capturan los movimientos de una mezcla de pequeñas esferas de distintos tamaños.

**Palabras clave:** Correlación cruzada, procesamiento de imagen digital, campo de desplazamientos, física aplicada.

## Abstract

In this paper we use the cross-correlation method for built a displacement field from a set of digital images (matrices) that capture the movements of a mixture of little spheres of different sizes.

**Keywords:** Cross-correlation, digital image processing, displacement field, applied physics.

**PACS:** 07.05.Pj, 07.05.Tp, 02.50.-r

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

En la física, la descripción del comportamiento dinámico de las ondas (de pequeña amplitud) viene dada por las soluciones de la denominada *ecuación de ondas*; sin embargo, en ciertas situaciones, algunos aspectos o características de ese comportamiento pueden apreciarse a través de métodos no dinámicos, de artificios geométricos, como el identificado por Huygens, que posibilita construir, progresivamente, los frentes de ondas de una onda difractada por una abertura. Por otro lado, a través de la mecánica clásica podemos describir el comportamiento dinámico de sistemas de partículas usando las correspondientes ecuaciones. Si consideramos un sistema muy numeroso de pequeñas esferas cuyos movimientos están limitados por superficies planas transparentes es posible construir, aquí también, representaciones geométricas del correspondiente comportamiento para instantes de tiempo fijos y muy próximos. Equipos y técnicas, de registro y procesamiento, respectivamente, están disponibles para generar los campos de desplazamientos o de velocidades de las ‘partículas’ en contacto con uno de aquellos planos.

El uso de métodos estadísticos de procesamiento de imágenes digitales para la obtención de un campo de velocidades tuvo recientemente, en abril del 2010, una de sus más importantes aplicaciones, en la determinación

aproximada de la cantidad de petróleo que habría sido derramado en el golfo de México, un mes después de la ruptura de una tubería conectada a una plataforma de producción de petróleo, que al hundirse generó una enorme contaminación en la región. La estimación del volumen derramado fue obtenida del procesamiento de imágenes capturadas en la zona de ruptura de la tubería.

En este artículo, después de presentar algunos conceptos relacionados con el método de correlación cruzada de matrices, que aplicamos a secuencias de imágenes digitales capturadas durante el proceso de desplazamiento de un conjunto numeroso de pequeñas esferas (en contacto y limitadas por un vidrio), mostramos un campo de desplazamiento correspondiente a esas imágenes que resultó de la ejecución de un programa computacional (que elaboramos en MATLAB); las ‘partículas’ que usamos corresponden a una etapa de pruebas de tal programa computacional. La estructura y contenido de este artículo es presentada en el siguiente orden: En la sección 2 presentamos las definiciones y la notación que son usadas en los capítulos posteriores. En la sección 3 damos algunas informaciones relevantes sobre el método de procesamiento de imágenes. En la sección 4 presentamos, de una manera inusual, el método de correlación cruzada en términos de una funcional. En la sección 5 presentamos la ideas esencial de como se construyen los vectores de desplazamiento; finalmente, presentamos las conclusiones.

## II. DEFINICIONES Y NOTACIÓN

En esta sección vamos a introducir algunas definiciones y establecer una notación para ser usada en las demás secciones a la hora de hacer distintas explicaciones y aclaraciones de etapas específicas del procesamiento de las imágenes a través del método de correlación cruzada, [1]. En la parte superior de cada asunto abordado es colocado, cuando ha sido posible, el 'resumen matemático' del correspondiente contenido.

### A. Imágenes $\Leftrightarrow$ matrices

Una imagen digital es siempre registrada como una matriz (o matrices) de números enteros, de manera que a partir de esa matriz (o matrices) puede ser reconstruida la imagen. En el caso de imágenes en blanco y negro se necesita una sola matriz; pero las imágenes a colores son registradas en tres matrices. Los elementos de esas matrices corresponden a las intensidades de la luz reflejada por los distintos "puntos" del objeto fotografiado y que son registradas en la correspondiente imagen. En el caso de una imagen que no sea a colores, dichos valores están entre el 0 y 255, siendo que el valor '0' corresponde al negro (mínima intensidad), 255 al blanco (máxima intensidad) y valores intermedios a los distintos tonos de gris.

### B. Notación para las matrices

Con **Imag0** y **Imag1** representamos las matrices correspondientes a las imágenes (que están en blanco y negro y que son del mismo tamaño) capturadas en dos instantes de tiempo muy próximos  $t_0$  y  $t_1$ , respectivamente, donde  $t_1 > t_0$ .

### C. Sub-matrices y patches

Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos matrices distintas y del mismo tamaño. Vamos a usar el término *patch* para hacer referencia a una determinada región cuadrada dentro de una matriz (como  $A_1$ ) pero no a la sub-matriz correspondiente, de manera que, por ejemplo, podamos identificar una sub-matriz de otra matriz (como  $A_2$ ) o la localización de determinado grupo de partículas (en la imagen) por la ocupación del *patch* correspondiente.

### D. $I \subset \text{Imag0}$

Con **I** representamos una sub-matriz cuadrada de **Imag0** que tenga un tamaño adecuado para incluir de 7 a 10 partículas. Muchas matrices **I**, dependiendo de su localización en la matriz **Imag0**, del contenido y de la densidad de partículas en la imagen, pueden no incluir información sobre partículas (por corresponder a regiones en el plano de fondo de la imagen).

### E. $\forall I \subset \text{Imag0}, \exists I_p \subset \text{Imag1}$

Con **I<sub>p</sub>** representamos cualquier sub-matriz cuadrada de **Imag1** que esté centrada en el *patch* correspondiente a aquel ocupado por la matriz **I** en **Imag0**. El tamaño de la **I<sub>p</sub>** (que aquí será considerado múltiplo entero positivo de **I**) deberá ser escogido de manera adecuada para que las partículas que al tiempo  $t_0$  ocupaban el *patch* del centro (en **Imag0**), estén ocupando, al tiempo  $t_1$ , un *patch* que esté en el interior de **I<sub>p</sub>** (vea la figura 1).

### F. Número de líneas y columnas de las matrices **I** e **I<sub>p</sub>**

Con  $mI$  y  $nI$  vamos a representar el número de líneas y columnas, respectivamente, de la sub-matriz **I** considerada, y con  $mI_p$  y  $nI_p$  los correspondientes números para la sub-matriz **I<sub>p</sub>** que esté siendo considerada. Por simplicidad, vamos a escribir:  $y0 = mI - 1$ .

### G. $\exists \{ I_{run} \} / I_{run} \subset I_p$

Con **I<sub>run</sub>** representamos toda y cualquier sub-matriz de **I<sub>p</sub>** que tiene el mismo tamaño que aquella de **I**. Matrices **I<sub>run</sub>** "corren" en el interior de **I<sub>p</sub>** de acuerdo con cierto criterio definido, por ejemplo, con paso de un *pixel* tanto a lo largo de la dirección vertical como de la dirección horizontal. Entonces, si el tamaño de **I<sub>p</sub>** es escogido adecuadamente, una **I<sub>run</sub>** particular podrá ocupar el mismo *patch* que aquel ocupado por las partículas en el tiempo  $t_1$ . El número máximo de estas **I<sub>run</sub>**, cuando el paso entre sub-matrices consecutivas, tanto a lo largo de la horizontal como de la vertical, es de un *pixel*, es igual a:  $N_{I_{run}} = (mI_p - y0)(nI_p - y0)$ .

**H.** En la física, la evolución dinámica de ciertos eventos puede ser acompañada a través de observaciones hechas desde un determinado referencial fijo. En el caso de los eventos registrados en una secuencia de imágenes tenemos que el referencial, en general, no es fijo; en ese caso, tendríamos que asociar un referencial con cada imagen; sin embargo, existe un caso particular. Para ciertas secuencias de imágenes, puede usarse un único referencial bajo las siguientes condiciones: que todas las imágenes tengan las mismas dimensiones (*pixels*) y que ellas hayan sido obtenidas bajo las mismas condiciones significativas. A continuación vamos a suponer que el arreglo experimental usado (para el registro de las imágenes) posibilita considerar que dichas condiciones son satisfechas. Ese referencial será aquí denominado 'principal'. Ahora definimos el referencial principal de manera que su origen coincida con el vértice superior izquierdo de la imagen (cualquier matriz **Imag0** o **Imag1** de la secuencia de imágenes), y sus direcciones positivas coincidan con las líneas vertical (para abajo) y horizontal (para la derecha), respectivamente. Con relación al referencial principal vamos a definir las posiciones de las distintas sub-matrices consideradas (en el procesamiento de las imágenes) a través de distintos índices de línea y columna, siendo cada par de ellos característico de la matriz de la cual hace parte la sub-matriz usada.

**I.** Con las letras  $i$  e  $j$  vamos identificar a posición, en el referencial principal, (del elemento (1,1)) de la sub-matriz **I** de **Imag0** que esté siendo considerada; y con  $i'$  e  $j'$  representamos la posición (del elemento (1,1)) de la sub-matriz **I<sub>run</sub>** de **Imag1** siendo considerada. Se puede entonces escribir, para valores adecuados de los índices,

$$\mathbf{Imag0}(i, j) = \mathbf{I}(1,1), \quad (1)$$

$$\mathbf{Imag1}(i', j') = \mathbf{I}_{run}(1,1). \quad (2)$$

### J. 'Imagen bien definida'

Una 'imagen bien definida', como deberían ser todas las imágenes que se necesite procesar, significa aquella que tiene las siguientes características: incluye un conjunto de *patches* cuyos centros son bastante intensos, alcanzando, inclusive, la máxima intensidad, además de experimentar una disminución gradual de intensidad conforme nos alejamos (en cualquier dirección) de su centro; y la intensidad media de cada *patch* es mayor que la del correspondiente 'fondo de la imagen', definiendo ello lo que llamamos 'contraste' en la imagen.

## III. SOBRE EL PROCESAMIENTO DE IMAGENES DIGITALES

Técnicas experimentales de captura y procesamiento de imágenes digitales, como la PIV, [1], posibilita caracterizar el comportamiento del flujo de un fluido en una determinada sección plana (definida por una lámina de luz laser que es generada para iluminar partículas trazadoras en el fluido), o en una secuencia de secciones paralelas entre sí, a través del establecimiento del campo vectorial de velocidades o de desplazamientos (correspondiente al movimiento, o, más propiamente, a la proyección del movimiento) de pequeñas partículas-albo colocadas en el fluido. La captura de las imágenes es hecha con una cámara filmadora dispuesta perpendicularmente a la sección iluminada. El conjunto de imágenes obtenidas, para cada sección de interés, es procesado de acuerdo con una técnica estadística específica, a través de la cual se comparan, de acuerdo a cierto criterio particular, pares de objetos de una misma naturaleza (en este caso, sub-matrices correspondientes a pequeños sectores de las imágenes donde son registradas algunas pocas partículas), que al ser implementado a través de un algoritmo matemático hace posible la identificación de aquel objeto (sub-matriz) que, en la muestra considerada, se asemeja más al objeto dado. Concretamente, dada una matriz **I**, se toma como muestra el conjunto formada por las sub-matrices **I<sub>run</sub>** de la correspondiente matriz<sup>1</sup> **I<sub>p</sub>**, siendo el objetivo del método determinar aquel *patch* de **Imag1** para donde se desplazaron las partículas inicialmente contenidas en un *patch* dado de **Imag0** (aquel ocupado por la matriz **I**). Luego, identificando

las posiciones de los correspondientes *patches*, en el referencial principal, se puede determinar el vector desplazamiento (o velocidad) para ese pequeño grupo de partículas. El algoritmo debe implementar ese mecanismo considerando todo posible *patch* de **Imag0**. Tal método de correlación cruzada<sup>2</sup> será presentado en términos matemáticos en la sección 4 y es el que fue implementado computacionalmente

Por otro lado, y como ya fue mencionado brevemente en la sección introductoria, los métodos de preparación, obtención y procesamiento de imágenes digitales, como los del tipo PIV, están siendo adaptados rápidamente a los objetivos, condiciones y materiales que son de interés en otras áreas de investigación, como en la de los procesos que generan el deslizamiento de avalanchas [3] y en la ingeniería geotécnica, en que fueron reportadas las primeras adaptaciones de ese método, algunas de las cuales siendo realizadas en una centrifuga geotécnica [4, 5] y, más recientemente, en los resúmenes de presentaciones en congresos y en diversos artículos, [6, 7]. Adaptaciones de ese método también están siendo usados en investigaciones con modelos de suelo hecho con material sintético y transparente [8].

De otra parte, en cualquier implementación de técnicas del tipo PIV hay varios ítems que tienen que ser experimentalmente definidos. Uno de los más importantes es el intervalo de tiempo considerado adecuado para el registro de las imágenes consecutivas<sup>3</sup>. Para definir ese intervalo de tiempo tenemos que llevar en consideración el contexto experimental correspondiente y ciertas propiedades de las partículas involucradas. Veamos la siguiente situación simple: Sea un conjunto de pequeñas partículas que se mueven entre dos instantes de tiempo,  $t_1$  y  $t_2$ , siendo registradas en dos imágenes, en esos instantes. Vamos a suponer que cada una de esas partículas presenta caras más o menos planas, de distinta forma y tamaño. En ese contexto, y dependiendo de la magnitud de la diferencia  $t_2 - t_1$ , puede suceder que cambie la cara de cada una de ellas que está expuesta a la iluminación, como resultado de lo cual, puede cambiar, a su vez, en grado no despreciable, el patrón de la luz reflejada en las mismas. Si ese pequeño conjunto de partículas hace parte de una *masa* casi continua de partículas entonces sería muy difícil (sino imposible) identificar, a través de métodos estadísticos, el desplazamiento de ese grupo específico. La situación mejora si el intervalo de tiempo es 'suficientemente pequeño' como para que las partículas no cambien significativamente su orientación espacial relativa, de manera que el patrón de luz reflejada por ellas sea prácticamente el mismo al registrado en la siguiente imagen; esa situación, junto con el alto contraste en las imágenes, constituyen los elementos más favorables para poder aplicar exitosamente el método de correlación cruzada.

<sup>2</sup> Además de ser usado en la técnica de PIV, es aplicado, por ejemplo, para hacer comparaciones entre señales eléctricas registradas en trazas de GPR (*Ground Penetrating Radar*) obtenidas en mediciones geofísicas rasas [2].

<sup>3</sup> E, complementariamente, a su sincronización con los correspondientes pulsos de luz laser.

<sup>1</sup> La notación que está siendo usada puede revisarse en la sección 2.  
 Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No. 3, Sept., 2013

#### IV. LA MATEMATICA DE LA CORRELACION CRUZADA

Consideremos un conjunto de matrices reales de tamaño  $m \times n$ , aquí denotado por  $M_{m,n}$ . Es posible definir una funcional (sobre el conjunto producto cartesiano de matrices) de la siguiente manera,

$$\mathfrak{F}: M_{m,n} \times M_{m,n} \rightarrow \mathfrak{R}, \quad (3)$$

cuyo valor está dado por la expresión,

$$\mathfrak{F}(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(i, j) \cdot B(i, j). \quad (4)$$

La cual, como vemos, es construida a partir de los productos de los elementos correspondientes de las matrices  $A$  y  $B$ . Por otro lado, tenemos una variante interesante de la situación correspondiente a (4) si consideramos que la matriz  $B$  no es fija, sino que 'recorre' el interior de una matriz más grande  $B$ , de manera que a cada posible *patch* de la misma que esté siendo ocupado corresponderá una matriz  $B$  particular, denotada entonces por  $B_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, \lambda$ , siendo<sup>4</sup>  $\lambda = (mIp - y0)(nIp - y0)$ , y para las cuales ciertas variables  $u$  y  $v$  definen la posición relativa de cada  $B_k$  en  $B$ . En ese contexto, se puede definir una función de dos variables reales,  $f_{A,B} \equiv f: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , cuyo valor está dado por la expresión,

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(i, j) \cdot B(i+u, j+v). \quad (5)$$

Donde  $u \in [1, p]$  y  $v \in [1, q]$ . La expresión anterior, para todo posible par ordenado  $(u, v)$ , define la denominada función de correlación cruzada de las matrices  $A$  y  $B$ . Ahora, es fácil percibir que hay una relación entre los valores de la funcional  $\mathfrak{F}$  y los valores de la función  $f$ :

$$f(u, v) = \mathfrak{F}(A, B_k) \Rightarrow f = \left\{ (u, v; \mathfrak{F}(A, B_k)) / u \in [1, p], v \in [1, q] \right\}, \quad (6)$$

que refleja la correspondencia entre un par ordenado  $(u, v)$  y una matriz particular  $B_k$  en  $B$ . Es con base en la relación anterior que la funcional  $\mathfrak{F}$  puede ser denominada funcional de correlación cruzada de las matrices  $A$  y  $B_k$ . Como consecuencia de esto, y en este caso particular, (el valor de) la función de correlación cruzada puede ser rescrito usando directamente las matrices  $B_k$ ,

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(i, j) \cdot B_k(i, j). \quad (7)$$

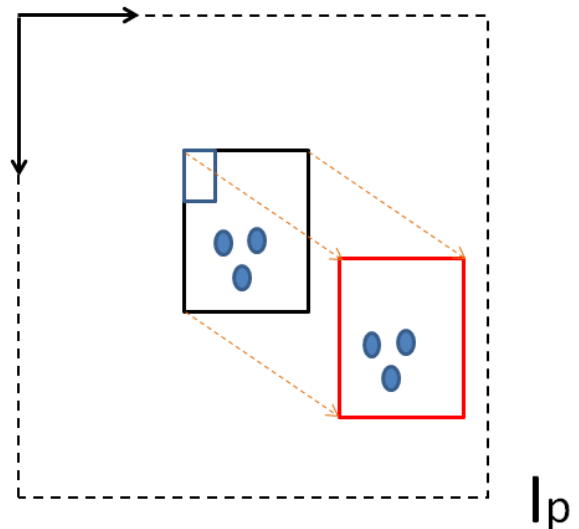
donde la dependencia de las variables  $u$  y  $v$ , en el lado derecho de la ecuación (7), se da a través de la relación<sup>5</sup>

$$B_k(1,1) = B(u, v). \quad (8)$$

En la literatura de PIV y de sus variantes, la expresión encontrada para a correlación cruzada de matrices de imágenes tiene la forma (5), pero la forma (7) es completamente equivalente a ella, y es la que aquí fue usada e implementada computacionalmente.

#### V. IDENTIFICANDO EL DESPLAZAMIENTO

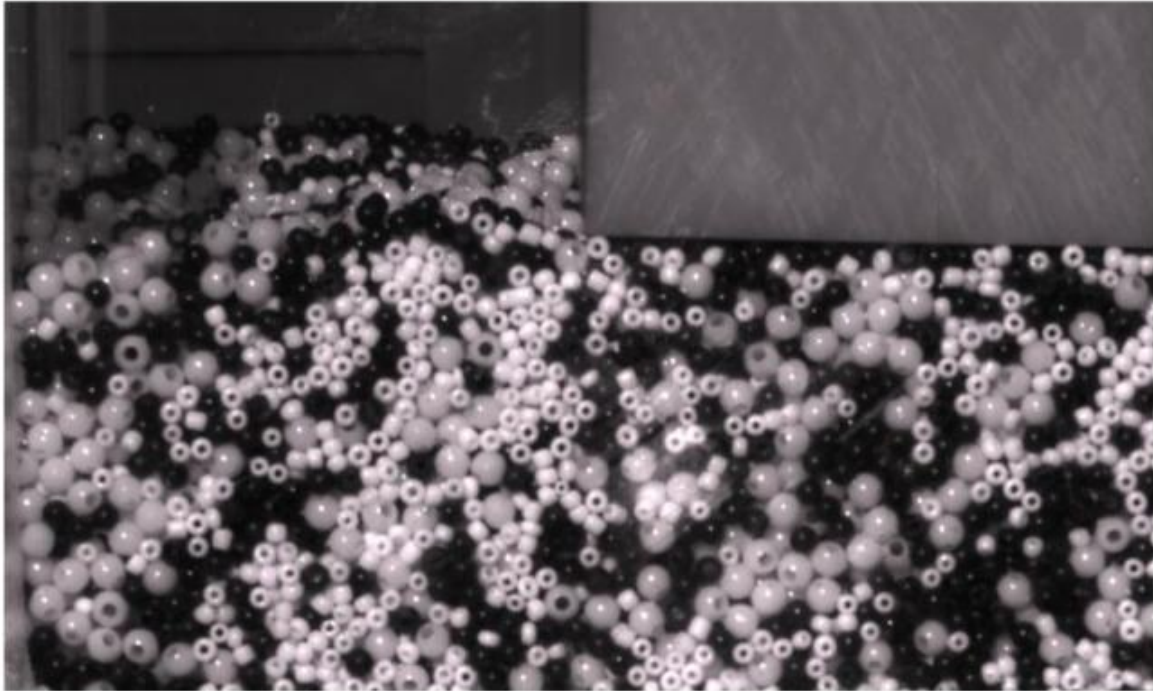
La idea principal de cómo identificar la dirección del desplazamiento de un pequeño grupo de partículas registradas en las imágenes puede entenderse considerando la figura 1.



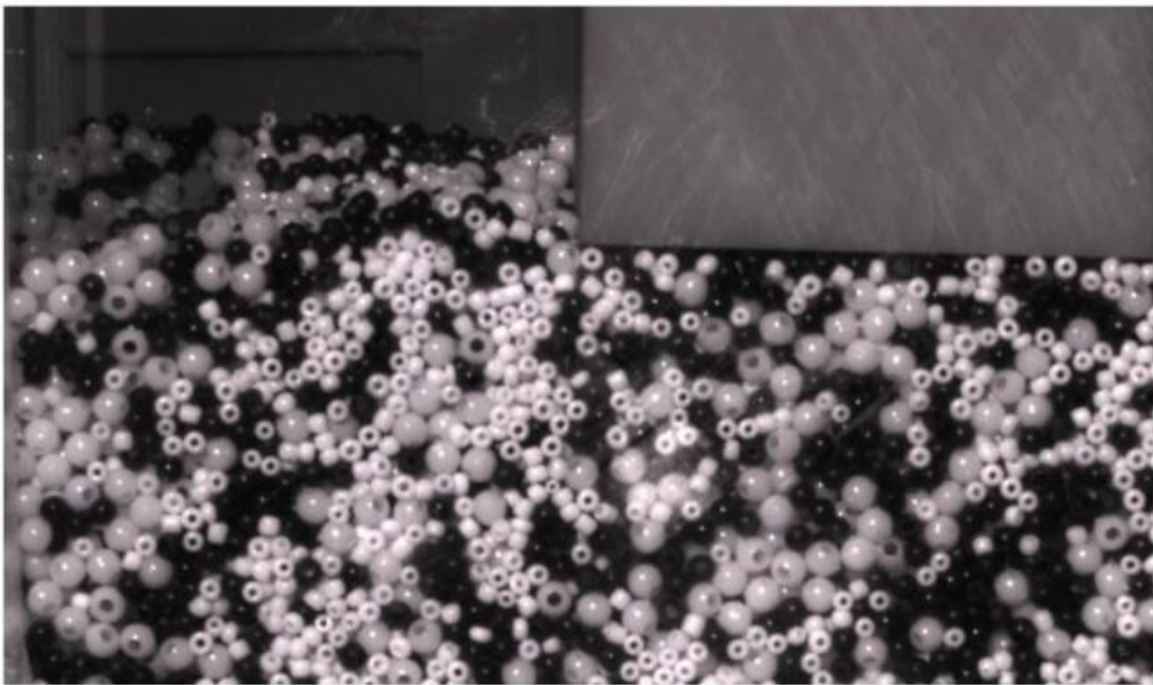
**FIGURA 1.** Un grupo de partículas está dentro de un *patch* particular (definido por el cuadrado de borde negro) de la matriz **Imag0**. Un instante después, ese mismo grupo de partículas es capturado por la imagen subsiguiente, **Imag1**, mostrando las partículas en una posición relativa distinta, dentro del *patch* rojo. La sub-matriz **Ip** ha sido definida adecuadamente en el sentido de que ella incluye a las partículas desplazadas. A través de la implementación del método de correlación cruzada se comparará la matriz numérica asociada con aquel *patch* de borde negro (en **Imag0**) con cada posible sub-matriz que tenga el mismo tamaño y que se encuentre en **Ip** (en **Imag1**). Identificando la posición relativa de la sub-matriz de **Ip** con la que se alcanza la máxima correlación, se puede determinar el desplazamiento del *patch* de partículas y así colocar un vector en esa dirección. Eso se repite para cada pequeño grupo de partículas contenidas en **Imag0**.

<sup>4</sup> Vea el ítem F de la sección 2.

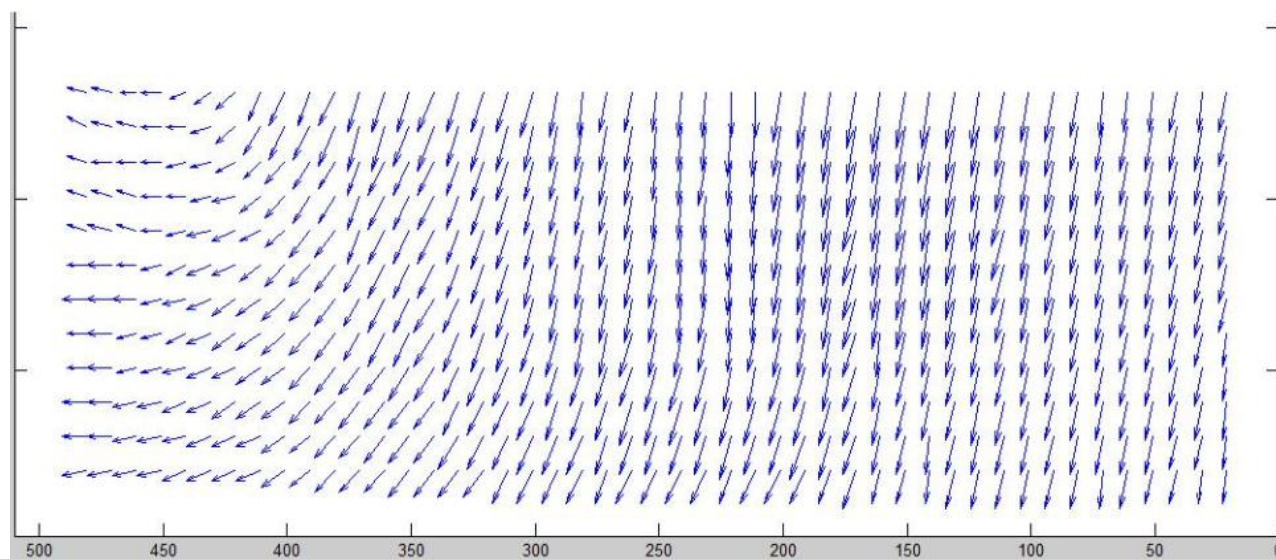
<sup>5</sup> Que resulta de nuestra elección en la definición de la posición de cada  $B_k$  en  $B$ .



**FIGURA 2.** Fotografía de las esferitas de plástico (con elevado contraste de sus colores) en contacto con una pared de vidrio y que están siendo desplazadas verticalmente (de arriba para abajo) por un bloque cúbico. Las fotografías fueron capturadas por una cámara digital que registró 50 imágenes por segundo. La superficie de vidrio fue iluminada perpendicularmente por una fuente de luz blanca intensa colocada a una distancia aproximada de 1 metro.



**FIGURA 3.** Fotografía correspondiente al mismo conjunto de esferas de la figura 2 que fue capturada (aproximadamente) 0,04 segundos después de la fotografía anterior. Al comparar ambas fotografías, si las observamos cuidadosamente, podrá notarse pequeñas diferencias en las posiciones relativas de varias esferitas; en particular, aquellas próximas a los extremos izquierdo y derecho de la base del cubo.



**FIGURA 4.** Campo vectorial de desplazamiento generado por nuestro programa computacional en el que se implementa el método de correlación cruzada de matrices. El campo vectorial fue generado usando las dos figuras anteriores, **Imag0** e **Imag1**, respectivamente. Puede verse que la mayoría de las esferitas (en contacto con la pared de vidrio) se desplaza verticalmente hacia abajo y que las que se encuentran más a la izquierda de la figura van curvando su movimiento progresivamente.

## VI. CONCLUSIONES

El método estadístico de correlación cruzada (*cross-correlation*) aplicado a las matrices correspondientes a imágenes digitales permite establecer de forma eficiente y correcta los campos de desplazamiento (o de velocidades) de partículas en movimiento. Por tratarse de un método estadístico, los diversos parámetros del método (como el tamaño de las sub-matrices **I<sub>p</sub>** con relación al de la sub-matriz **I**, el intervalo de tiempo para dos imágenes **Imag0** e **Imag1**, etc.) deben escogerse de manera adecuada, a través de diversos ensayos. El campo de desplazamiento de partículas mostrado puede ser tomado como un nuevo ejemplo que complementa aquellos campos mostrados en los libros de física general.

## AGRADECIMIENTOS

A los profesores Dr. Fernando Saboya y Dr. Sérgio Tibana, del *Laboratório de Engenharia Civil* (LECIV), de la UENF, en Campos dos Goytacazes, RJ, Brasil, por la muy provechosa interacción y por las diversas informaciones proporcionadas sobre lo que es esperado del uso de los métodos de procesamiento de imágenes en investigaciones geotécnicas en curso; al profesor Dr. Rodrigo Reis por las varias aclaraciones. El autor también agradece al *Programa Nacional de Pós-Doutorado* de la *Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* - CAPES, por la beca concedida durante la ejecución del proyecto '*Estudos de Fixação de Plataformas flutuantes (Torpedos)*'.

## REFERENCIAS

- [1] Raffel, M., Willert, C., Wereley, S., and Kompenhans, K., *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide* (Springer, 2da Edition, USA, 2007).
- [2] Travassos, J. M., Peche, L. A., Bulnes, J. D., and Martins, S., *Some Examples of EM Phase Velocity Dispersion in Near-surface Layers*, The Meeting of the Americas (AGU 2010), Foz de Iguacu, Paraná, Brazil, (2010).
- [3] Shiva, P., Pudasaini, Kolumban, Hutter, *Avalanche Dynamics* (Springer, USA, 2007).
- [4] Zhang, Y., Tan, T., Leung, C.; *Application of particle image velocimetry (PIV) to centrifuge modelling of uniform clay*, Journal of Physical Modelling in Geotechnics **5**, 15-26 (2005).
- [5] White, D., Take, W., *Discussion on 'Application of Particle Image Velocimetry (PIV) in Centrifuge Testing of Uniform Clay'*, IJPMG-International Journal of Physical Modelling in Geotechnics **4**, 27-31 (2005).
- [6] *Proceedings of the 7th International Conference on Physical Modeling in Geotechnics* (ICPMG 2010), Zurich, Switzerland, 28 June - 1 July, 2010.
- [7] Ni, Q., Hird, C., Guymer, I., *Physical modelling of pile penetration in clay using transparent soil and particle image velocimetry*, Géotechnique **60**, 121-132 (2010).
- [8] Sadek, S., Iskander, M., Liu, J., *Accuracy of Digital Image Correlation for Measuring Deformations in Transparent Media*, Journal of Computing in Civil Engineering, 88-96, April (2003).