Lagrangeanas no estándar en la mecánica clásica unidimensional

J. D. Bulnes
Grupo de Mecânica Quântica, Informação Quântica e Física Aplicada, Universidade Federal do Amapá, Rod. Juscelino Kubitschek, Km. 2, Jardim Marco Zero, Macapá, CEP. 68903-419, AP, Brasil.,

E-mail: bulnes@unifap.br

(Recibido el 27 de Julio de 2012; aceptado el 18 de Diciembre 2012)

Resumen
Se ha construido un conjunto de familias de lagrangeanas no triviales para algunos sistemas físicos de la mecánica clásica. Además, se realizaron verificaciones matemáticas para asegurar la consistencia física de los resultados.

Palabras clave: Lagrangeanas equivalentes, mecánica lagrangeana, problema inverso.

Abstract
A set of families of non-trivial lagrangians has been worked out for some physical systems in classical mechanics. In addition, mathematical checks were performed to ensure the physical consistency of the results.

Keywords: Equivalent lagrangian, Lagrangian mechanics, inverse problem.

PACS: 02.30.Zz, 45.20.Jj **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Es sabido que diversas teorías físicas admiten una formulación lagrangeana; ejemplos de esta situación son la electrodinámica clásica, la mecánica cuántica no relativista y la relatividad general, en las que las ecuaciones de Maxwell [1], de Schrödinger [2] y de Einstein [3], respectivamente, se obtienen, dentro del contexto variacional correspondiente, a partir de la ecuación de Euler-Lagrange. En el caso de la formulación lagrangeana de la mecánica clásica [4] se define una función lagrangeana del tipo $L : R^{1+2n} \rightarrow R,$ con *2n+1* variables *independientes*, denotadas por *t*, ***x***, ***v***, que son, en general, cualesquiera variables[1]. Particularmente, en la mecánica clásica unidimensional, la única que vamos a considerar aquí, aunque siendo posible, no interesa construir nuevas lagrangeanas que puedan asociarse con un mismo sistema físico, pues ninguna información adicional –relativa a la dinámica del sistema considerado– podría obtenerse a partir de ellas. En cambio, en la mecánica cuántica formulada por Feynman [5], la dinámica de un sistema cuántico sí depende de la elección de la lagrangeana, que se toma de un conjunto de lagrangeanas clásicamente equivalentes [6].

Los sistemas clásicos (y no sólo ellos) pueden estar correctamente asociados con más de una lagrangeana. La construcción concreta de esas lagrangeanas, cuando sea posible, resuelve un *problema inverso* de la mecánica clásica que puede ser formulado de la siguiente manera: conocida la trayectoria física que un cierto sistema físico recorre determinar todas las funciones lagrangeanas que producen esa trayectoria. El *problema directo* es resuelto por la ecuación de Euler-Lagrange: Estando definida la lagrangeana, determinar la correspondiente trayectoria física.

El problema de la construcción de lagrangeanas equivalentes no triviales y no estándar ha sido considerado en varios trabajos; véase, por ejemplo, las Ref. [7-10]. En el caso específico de la Ref. [9] son usadas algunas nuevas lagrangeanas relacionadas con la ecuación de movimiento $q''+\gamma.q'=0$, correspondiente a un sistema disipativo, y también una expresión para las lagrangeanas asociadas con la ecuación de movimiento $q''+dV(q)/dq=0$; en ambos casos, las lagrangeanas son presentadas sin demostración. Además, en la Ref. [10], el mismo sistema disipativo es considerado y es presentada, también sin demostración, una expresión matemática a partir de la cual se pueden generar distintas lagrangeanas equivalentes para ese sistema.

Por otro lado, en la Ref. [11], publicada en esta misma revista, no hubo espacio para incluir algunas familias de lagrangeanas equivalentes, ni tampoco para mostrar las construcciones correspondientes. Es por ello que en este artículo extendemos un poco aquel trabajo, construyendo,

[1] Al calcular la derivada total temporal que aparece en la ecuación de Euler-Lagrange, las variables ***x*** y ***v*** se toman dependientes del tiempo; luego, al resolver esa ecuación, surge la dependencia entre ***x****(t)* y ***v****(t)*, la cual se da sólo sobre una trayectoria concreta.

justamente, expresiones matemáticas que definen familias de lagrangeanas para los siguientes sistemas mecánicos: una partícula libre, un oscilador armónico simple, una partícula en un potencial lineal y un sistema disipativo, y al hacerlo tendremos la oportunidad de apreciar algunos aspectos que no serían visibles de otra manera.

II. LA PARTICULA LIBRE

En la Ref. [11] fue mostrado, en la Ec. (28), que la función de tres variables independientes L, con valor,

$$L(t,x,v)=\int^{v}\int^{\sigma}G(\eta,x-\eta t)d\eta d\sigma+\int^{x}\beta_t(t,z)dz+v\beta(t,x)+\phi(t), \tag{1}$$

define una familia de lagrangeanas para la partícula libre unidimensional; esa expresión es un caso especial de otra más general, e independiente del sistema físico, que se construyó en la subsección A, sección I, de la misma referencia (vea la Ec. (57) de nuestro Apéndice A). En la Ec. (1), la función G es solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden,

$$v\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial t}=0, \tag{2}$$

y tiene, como se ve directamente de (1), la forma $G(\eta,x-\eta t)$. La forma de la función G fue encontrada trabajando con las Ecs. (25) a (27) de la Ref. [11]. En (1), β es una función derivable arbitraria y ϕ es una función arbitraria. Ahora vamos a considerar, como un ejemplo específico, las siguientes funciones,

$$G(\eta,x-\eta t)=\eta(x-\eta t),\quad \beta(t,z)=tz,\quad \phi(t)=0. \tag{3}$$

Al sustituirlas en la Ec. (1) y después de realizar las correspondientes operaciones encontramos,

$$L_1(t,x,v)=\frac{1}{2}x^2+xvt+\frac{1}{6}xv^3-\frac{1}{12}tv^4. \tag{4}$$

Un segundo ejemplo, más interesante, es construido considerando las funciones,

$$G(\eta,x-\eta t)=Sin(\lambda(x-\eta t)),\quad \beta(t,z)=tz,\quad \phi(t)=0, \tag{5}$$

entonces encontramos la función,

$$L_2(t,x,v)=\frac{1}{2}x^2+xvt-\frac{1}{\lambda^2t^2}Sin(\lambda(x-vt)). \tag{6}$$

Las funciones definidas en (4) y (6) son lagrangeanas para la partícula libre unidimensional, como se puede verificar fácilmente usando la ecuación de Euler-Lagrange. Veamos eso para el caso de la lagrangeana L_2, donde, por comodidad, usaremos la notación $L_2=L$. Entonces encontramos los siguientes resultados,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t,x,v)\equiv L_x(t,x,v)=x+vt-\frac{1}{\lambda t^2}Cos(\lambda(x-vt)), \tag{7}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial v}(t,x,v)\equiv L_v(t,x,v)=xt+\frac{1}{\lambda t}Cos(\lambda(x-vt)), \tag{8}$$

y la derivada temporal total de $\partial L/\partial v$, la función $d(\partial L/\partial v)/dt$, que depende sólo de la variable t, tiene como valor a la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)(t,x(t),v(t))=x+vt+\frac{1}{\lambda t}\left(-Sin(\lambda(x-vt))\right)(-\lambda v' t)+$$
$$-\frac{1}{\lambda t^2}Cos(\lambda(x-vt)). \tag{9}$$

Entonces, usando la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)=0, \tag{10}$$

encontramos,

$$v'Sin(\lambda(x-vt))=0, \tag{11}$$

de donde podemos escribir,

$$\Rightarrow\quad v'=0\quad\vee\quad Sin(\lambda(x-vt))=0, \tag{12}$$

lo que implica,

$$\Rightarrow\quad v'=0\quad\vee\quad x=vt+\frac{k\pi}{\lambda},\quad k\in Z, \tag{13}$$

expresiones que son consistentes con la descripción del movimiento de una partícula libre. Con relación a la lagrangeana en (6), llamo la atención del lector para el término harmónico, el mismo que no genera ninguna inconsistencia física, pues la trayectoria rectilínea de la partícula libre puede considerarse como un arco de una circunferencia de radio R suficientemente grande; es más o menos el caso del movimiento rectilíneo sobre (un sector de) la superficie terrestre. El parámetro $\lambda=1/R$ (*rad/m*) fue incorporado como un factor de conversión para la unidad angular.

Otro ejemplo de lagrangeana, una más complicada, lo tenemos definiendo las funciones,

$$G(\eta,x-\eta t)=e^{\eta}Sin(\lambda(x-\eta t)),\quad \beta(t,z)=tz,\quad \phi(t)=0, \tag{14}$$

entonces encontramos la función,

$$L_3(t,x,v)=\frac{x^2}{2}+xvt+$$
$$+\frac{e^v}{(1+\lambda^2t^2)^2}\left[(1-\lambda^2t^2)Sin(\lambda(x-vt))+2\lambda t.Cos(\lambda(x-vt))\right], \tag{15}$$

entre muchas otras posibles lagrangeanas igualmente equivalentes.

III. EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Como es bien sabido, la lagrangeana estándar para el oscilador armónico simple está definida por la expresión,

$$L(t,x,v)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}kx^2, \tag{16}$$

la cual, al ser colocada en la ecuación de Euler-Lagrange, produce la ecuación de movimiento,

$$\omega=v^{\cdot}=-\omega^2x, \tag{17}$$

siendo $\omega^2=k/m$. Con ello, la Ec. (5) de la Ref. [11] (vea la Ec. (58) de nuestro Apéndice A), se escribe de la siguiente manera,

$$v.\frac{\partial G}{\partial x}-\omega^2x.\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial t}=0, \tag{18}$$

y la correspondiente ecuación de las características, Ref. [12], adquiere la forma,

$$\frac{dx}{v}=-\frac{dv}{\omega^2x}=dt\cdot \tag{19}$$

Entonces, de la igualdad del lado izquierdo, tenemos

$$-\omega^2xdx=vdv, \tag{20}$$

que luego de integrada se puede escribir de la siguiente manera,

$$-\omega^2\frac{x^2}{2}=\frac{v^2}{2}-c_1 \quad\rightarrow\quad c_1=\frac{v^2+\omega^2x^2}{2}\cdot \tag{21}$$

También tenemos,

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{2c_1-\omega^2x^2} \quad\rightarrow\quad \int\frac{dx}{\sqrt{2c_1-\omega^2x^2}}=\int dt, \tag{22}$$

de donde la segunda constante de integración, c_2, puede ser despejada,

$$c_2=\frac{1}{\omega}ArcSin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{v^2+\omega^2x^2}}\right)-t, \tag{23}$$

con lo cual el valor de la función G, la más general que permite la Ec. (18), está definido por la expresión,

$$G(t,x,v)=G\left(\frac{v^2+\omega^2x^2}{2},\frac{1}{\omega}ArcSin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{v^2+\omega^2x^2}}\right)-t\right), \tag{24}$$

Si en la expresión anterior hacemos,

$$G(t,x,v)=T(u,r), \tag{25}$$

siendo,

$$u(x,v)=\frac{v^2+\omega^2x^2}{2}, \tag{26}$$

y

$$r(t,x,v)=\frac{1}{\omega}ArcSin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{v^2+\omega^2x^2}}\right)-t\cdot \tag{27}$$

Además, si consideramos los resultados,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{\omega}ArcSin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{v^2+\omega^2x^2}}\right)-t\right)\right]=\frac{v}{v^2+\omega^2x^2}, \tag{28}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{1}{\omega}ArcSin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{v^2+\omega^2x^2}}\right)-t\right)\right]=-\left(\frac{x}{v^2+\omega^2x^2}\right), \tag{29}$$

entonces podemos escribir,

$$\frac{\partial G}{\partial x}\equiv G_x=T_uu_x+T_rr_x=T_u(\omega^2x)+T_r\left(\frac{v}{v^2+\omega^2x^2}\right), \tag{30}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}\equiv G_t=T_uu_t+T_rr_t=-T_r \tag{31}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}\equiv G_v=T_uu_v+T_rr_v=T_uv-T_r\left(\frac{x}{v^2+\omega^2x^2}\right)\cdot \tag{32}$$

Después de remplazar los resultados previos vemos que la Ec. (18) resulta satisfecha. Con esto tenemos que la expresión más general, dentro de lo que permite la expresión (5) de la Ref. [11] (vea la Ec. (58) de nuestro Apéndice A), para una lagrangeana no estándar asociada con un oscilador armónico simple, está definida de la siguiente manera,

$$L(t,x,v)=\int^{v}\int^{\omega}G\left(\frac{z^2+\omega^2x^2}{2},\frac{1}{\omega}ArcSin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}\right)-t\right)dzd\omega$$
$$+\int^{x}\beta_t(t,z)dz+v\beta(t,x)+\phi(t)\cdot \tag{33}$$

Ahora consideremos un ejemplo concreto. Vamos a definir las funciones,

$$\beta(t,x)=xt, \qquad \phi(t)=0, \tag{34}$$

y también,

$$G(t,x,v)=Sin\left(ArcSin\ \left(\frac{\omega x}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}\right)-\omega t\right), \tag{35}$$

expresión que es del tipo $Sin(\theta\text{-}\omega t)$. Si identificamos θ con el argumento de la función *ArcSin* en (35) y usamos el desarrollo de la función seno para la diferencia de dos ángulos, entonces podemos escribir,

$$G(t,x,v)=\frac{\omega xCos(\omega t)}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}-\frac{zSin(\omega t)}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}. \tag{36}$$

Luego escribimos,

$$L_1(t,x,v)=\phi(t)+v\beta(t,x)+\int\beta_t(t,z)dz+$$

$$+\int^v\int^\sigma\frac{\omega xCos(\omega t)}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}dz.d\sigma-\int^v\int^\sigma\frac{zSin(\omega t)}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}\cdot \tag{37}$$

La integral del lado izquierdo en (37) es igual a la expresión,

$$\int^v\int^\sigma\frac{\omega xCos(\omega t)}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}dz.d\sigma=(\omega xCos(\omega t))\left[v\ln(\omega x)\right]+$$

$$+(\omega xCos(\omega t))\left[v.ArcSinh\left(\frac{v}{\omega x}\right)-\sqrt{v^2+\omega^2x^2}\right], \tag{38}$$

y la integral del lado derecho en (37) resulta ser igual a la siguiente expresión,

$$\int^v\int^\sigma\frac{zSin(\omega t)}{\sqrt{z^2+\omega^2x^2}}=\frac{1}{2}Sin(\omega t).\left[v\sqrt{v^2+\omega^2x^2}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}Sin(\omega t).\left[(\omega x)^2ArcSinh\left(\frac{v}{\omega x}\right)\right]\cdot \tag{39}$$

Usando la igualdad,

$$ArcSinh\ \left(\frac{v}{\omega x}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{v^2+\omega^2x^2}}{\omega x}\right), \tag{40}$$

podemos rescribir la lagrangeana en (37) de la siguiente manera,

$$L_1(t,x,v)=xvt+\frac{x^2}{2}+$$

$$+\omega x.Cos(\omega t)\left(v\ln(v+\sqrt{v^2+\omega^2x^2})-\sqrt{v^2+\omega^2x^2}\right)+$$

$$-\frac{Sin(\omega t)}{2}\left((\omega x)^2\ln(\frac{v+\sqrt{v^2+\omega^2x^2}}{\omega x})+v\sqrt{v^2+\omega^2x^2}\right), \tag{41}$$

la cual es bastante más extensa que la lagrangeana ordinaria para el oscilador harmónico simple, dada en (16), pero es equivalente a ella e igualmente válida.

IV. PARTICULA EN UN POTENCIAL LINEAL

La ecuación de movimiento para una partícula en un potencial lineal, $V(x)=\alpha.x$, donde α es una constante, es: $v^{'}=-\alpha/m$, de manera que la Ec. (5) de la Ref. [11] (vea la Ec. (58) de nuestro Apéndice A), ahora se escribe de la siguiente manera,

$$v\frac{\partial G}{\partial x}-(\frac{\alpha}{m})\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial t}=0\cdot \tag{42}$$

De acuerdo con el método de las características podemos escribir,

$$\frac{dx}{v}=\frac{dv}{(-\alpha/m)}=dt, \tag{43}$$

de la Ec. (43) encontramos $x=-(\alpha/2m)t^2+c_1t+c_2$ y $v=-(\alpha/m)t+c_1$, no manifestándose ninguna otra relación independiente entre las variables. Entonces, la solución general de (42) se puede escribir de la siguiente forma,

$$G(t,x,v)=G(c_1,c_2)=G(v+(\alpha/m)t,x-vt-(\alpha/2m)t^2), \tag{44}$$

siendo G una función arbitraria. Podemos verificar que (44) es solución de (42); para ello redefinimos la función G como un función de dos nuevas variables u y r. Veamos,

$$G(t,x,v)=G(v+(\alpha/m)t,x-vt-(\alpha/2m)t^2)\equiv M(u,r), \tag{45}$$

donde $u=v+(\alpha/m)t$ y $r=x-vt-(\alpha/2m)t^2$, entonces,

$$G_x=M_uu_x+M_rr_x=M_r \tag{46}$$

$$G_t=M_uu_t+M_rr_t=(\alpha/m)M_u+(-v-(\alpha/m)t)M_r \tag{47}$$

$$G_v=M_uu_v+M_rr_v=M_u+(-t)M_r \tag{48}$$

de las cuales resulta,

$$vG_x-(\alpha/m)G_v+G_t=0, \tag{49}$$

es decir, la Ec. (42) ser verifica. Entonces, la expresión para las funciones lagrangeanas no estándar correspondiente a una partícula en un potencial lineal tiene la forma,

$$L(t,x,v)=\int^{v}\int^{\sigma}G\left(\eta+(\alpha/m)t,\quad x-\eta t-(\alpha/2m)t^{2}\right)d\eta d\sigma+ \\ +\int^{x}\beta_{t}(t,z)dz+v\beta(t,x)+\phi(t)\cdot \tag{50}$$

La función anterior está bien definida.

V. UN SISTEMA DISIPATIVO

Aquí consideramos un sistema físico con ecuación de movimiento: $q''+\gamma.q'=0$, la cual corresponde a un sistema disipativo. De manera semejante a lo hecho en las secciones anteriores, aquí también construimos una familia de lagrangeanas para este sistema. Entonces, de la ecuación de movimiento, tenemos que $w=q''=-\gamma.v$; con esto, la Ec. (5) de la Ref. [11] (vea la Ec. (58) de nuestro Apéndice A) se reduce a la siguiente,

$$v\frac{\partial G}{\partial x}-\gamma.v\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial t}=0,\cdot \tag{51}$$

La ecuación de las características tiene la forma,

$$\frac{dx}{v}=-\frac{dv}{\gamma.v}=dt\cdot \tag{52}$$

Ahora, a partir de la ecuación de la izquierda tenemos,

$$\gamma.x=-v+c_{1}\quad\rightarrow\quad c_{1}=v+\gamma.x\cdot \tag{53}$$

También, de la relación $dx/dt = v = c_1 - \gamma x$, después de hacer la respectiva integración, obtenemos,

$$c_{2}=-\frac{1}{\gamma}\ln(v)-t, \tag{54}$$

luego, la solución general de la Ec. (51) viene dada por la expresión,

$$G(t,x,v)=G\left(v+x\gamma,\frac{1}{\gamma}\ln(v)+t\right), \tag{55}$$

Así, dentro del contexto considerado, la lagrangeana más general que encontramos tiene la forma,

$$L(t,x,v)=\int^{v}\int^{\sigma}G\left(\eta+x\gamma,\frac{1}{\gamma}\ln(\eta)+t\right)d\eta d\sigma+ \\ +\int^{x}\beta_{t}(t,z)dz+\phi(t)+v\beta(t,x), \tag{56}$$

a partir de la cual pueden ser generadas lagrangeanas específicas.

IV. CONCLUSIONES

En este artículo hemos retomado el viejo problema de la construcción de familias de funciones lagrangeanas para sistemas físicos unidimensionales, pero lo hemos hecho con fines exclusivamente didácticos, haciendo uso de una expresión generadora de lagrangeanas que es distinta de las que se pueden encontrar en la literatura. Este articulo constituye, además, una extensión parcial de lo que desarrollamos en la Ref. [11]. Aquí hemos trabajado con los siguientes sistemas físicos: una partícula libre, un oscilador armónico simple, una partícula sometida a un potencial lineal y un sistema disipativo. En el caso de la partícula libre fueron construidas explícitamente algunas nuevas lagrangeanas, dadas en las Ecs. (4), (6) y (15), además de realizar algunas verificaciones de consistencia física. En el caso del oscilador armónico simple construimos un ejemplo explicito, dado en la Ec. (41) y construimos funciones generadoras para lagrangeanas asociables a una partícula en un potencial lineal y para un sistema disipativo especifico, lo que es mostrado en las Ecs. (50) y (56), respectivamente. Las familias de lagrangeanas encontradas constituyen una solución al *problema inverso* descrito en la sección introductoria de este artículo, a pesar de que esas lagrangeanas poseen términos que no son todos dimensionalmente iguales. Finalmente, los ejemplos construidos, a través de las características que ellas presentan, nos dan la posibilidad de sustentar la siguiente interpretación: la incorporación de nuevos términos en una cierta lagrangeana no corresponde, necesariamente y en el caso más general, a la incorporación de otras interacciones.

REFERENCIAS

[1] Brédov, M., Rumiántsev, V., Toptiguin, I., *Electro-dinámica Clásica,* (Editorial MIR, Moscú, 1986).

[2] Schrödinger, E., *Collected Papers on Wave Mechanics,* (Chelsea, New York, 1978).

[3] Hawking, S., *A Stubbornly Persistent Illusion, The essential scientific writings of Albert Einstein,* (Running Press Book Publishers, Philadelphia, 2007).

[4] Symon, K. R., *Mechanics,* 3rd Ed. (Addison-Wesley, New York, 1971).

[5] Para una introducción simplificada consultar: Bulnes, J. D., *Propagadores cuánticos calculados de acuerdo con el postulado de Feynman con caminos aproximados por polinomios,* Rev. Mex. Fis. E **55**, 34-43 (2009).

[6] Dodonov, V. V., Man'ko, V. I., Skarzhinsky, V. D., *Classically equivalent Hamiltonians and ambiguities of quantization: A particle in a magnetic field,* Nuovo

Cimento della Societa Italiana di Fisica B **69**, 185-205 (1982).
[7] Yan, C., *Construction of Lagrangians and Hamiltonians from the equation of motion*, Am. J. Phys. **46**, 671-675 (1978).
[8] Negri, L. J., da Silva, E. G., *s-Equivalent Lagrangians in generalized mechanics*, Phys. Rev. D **33**, 2227-2232 (1986).
[9] Okubo, S., *Does the equation of motion determine commutation relations?*, Phys. Rev. D **22**, 919-923 (1980).
[10] Lemos, N. A., *Physical consequences of the choice of the Lagrangian*, Phys. Rev. D **24**, 1036-1039 (1981).
[11] Bulnes, J. D., *Ecuaciones dinámicas no estándar a partir de lagrangianos convexos en la posición*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **4**, 246-250 (2010).
[12] Sneddon, I., *Elements of Partial Differential Equations*, 1st. Ed. (McGraw-Hill, Koga, 1957).
[13] Hojman, S., Shepley, L., *Lagrangeanas Equivalentes*, Rev. Mex. Fís. **28**, 149-205 (1982).

APENDICE A

Las lagrangeanas generales presentadas en las Ecs. (1), (33) y (50) son casos particulares de la siguiente expresión,

$$L(t,x,v)=\int^{v}\int^{\sigma}G(t,x,z)dzd\sigma+\int^{x}\beta_t(t,z)dz+v\beta(t,x)+\varphi(t), \quad (57)$$

la cual deducimos en la Ref. [11]. La expresión (57), que es distinta de otras aparecidas en algunas referencias, como por ejemplo en [7,13], es independiente de cualquier sistema físico; para especificar un sistema mecánico clásico debemos determinar la función *G*, pero para ello debemos resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden,

$$v\frac{\partial G}{\partial x}+w\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial t}=0, \quad (58)$$

donde w, que no es una variable de la lagrangeana L, corresponderá, *sobre una trayectoria*, a la aceleración: $w=v^{'}$. Notemos que la Ec. (58) puede rescribirse, para una trayectoria específica, como,

$$\frac{d}{dt}G(t,x(t),x^{'}(t))=0, \quad (59)$$

la cual expresa que $G(t, x(t), x'(t))$ es una constante de movimiento (sobre la trayectoria).

Para concluir, aprovechando este espacio, vamos a colocar aquí tres correcciones tipográficas para símbolos que aparecen en las Ecs. (33), (34) y (35) de la Ref. [11], donde debió ser colocada una variable *x* en vez de una *v* en algunos términos de esas ecuaciones. Las ecuaciones indicadas incluyendo las correcciones citadas son las siguientes,

$$H(t,x,p)=pW(t,x,p)-L(t,x,W(t,x,p)), \quad (62)$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial v} \;\Rightarrow\; v=W(t,x,p)=\frac{1}{m}(p-xt), \quad (63)$$

$$H(t,x,p)=\frac{1}{2m}\left(p^2+(t^2-m)x^2-2txp\right), \quad (64)$$

Con ello las expresiones son consistentes.