Propagadores cuánticos calculados de acuerdo con el postulado de Feynman con caminos aproximados por polinomios

J.D. Bulnes*
Departamento de Física, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais
Av. António Carlos 6.627, Belo Horizonte - CEP: 31270-901, MG, Brasil,
e-mail: bulnes@on.br

Recibido el 27 de mayo de 2008; aceptado el 27 de enero de 2009

In this paper we calculate in detail the quantum mechanical propagator for two physical systems, a two-dimensional free particle and a particle in the Earth's gravitational field, according to Feynman sum-over-paths postulate. The method of propagator calculation that we have used is based on an approximation by polynomials, which is consistent with Weierstrass theorem. The results obtained with this method, except for a numerical factor that depend only on the degree of the polynomials, are equal to those obtained through the use of formal methods.

Keywords: Quantum propagator; path integrals; polynomials.

En este artículo calculamos detalladamente el propagador mecánico cuántico para dos sistemas físicos, una partícula libre en dos dimensiones y una partícula en el campo gravitacional de la Tierra, de acuerdo con el postulado de sumas sobre caminos de Feynman. El método de cálculo del propagador que hemos utilizado está basado en una aproximación por polinomios, que es consistente con el teorema de Weierstrass. Los resultados obtenidos con este método, a excepción de un factor numérico que depende solamente del grado de los polinomios, son iguales a aquellos obtenidos con el uso de métodos formales.

Descriptores: Propagador cuántico; integral de camino; polinomios.

PACS: 02.30.Mv, 03.65.-w

1 Introducción

Es bien sabido que los modelos físicos que dan cuenta de las propiedades y del comportamiento dinámico de los sistemas cuánticos son construidos de acuerdo con las consideraciones de una formulación específica de la mecánica cuántica. Entre esos modelos contamos los implementados de acuerdo con la formulación de integrales de camino, debida a Feynman, [1,2], donde podemos identificar algunos ejemplos concretos, como el de Castro-Neto y Caldeira, sobre la disipación cuántica, [3], y el de Caldeira y Leggett, sobre el movimiento Browniano cuántico, [4], por mencionar sólo dos. La formulación de Feynman, en particular, parece naturalmente bien adaptada a situaciones físicas como las que se manifiestan en el experimento de la doble rendija, donde los ingredientes involucrados tienen, particularmente en la interpretación de los resultados físicos, algunas características intuitivas [5]. De otro lado, en lo que se refiere a las aplicaciones más simples, el uso de dicha formulación ha permitido establecer, de una manera alternativa, las expresiones correctas de los propagadores cuánticos correspondientes a diversos sistemas físicos. Y en cuanto al proceso mismo de construcción de los propagadores, que es lo que aquí nos interesa, la formulación de Feynman presenta características propias, como la de considerar para su definición un número superinfinito de caminos continuos que unen dos puntos espacio-temporales fijos definidos. Por otra parte, de los libros de cálculo o física matemática, es conocido el teorema de Weierstrass [6], que establece que las funciones continuas pueden ser aproximadas por polinomios; entonces, notando que para un alto porcentaje de los caminos que deben considerarse en la construcción del propagador puede aplicarse lo establecido por Weierstrass, estamos interesados en determinar el efecto que sobre el propagador cuántico tiene una aproximación polinomial para los caminos. Tratamos este asunto considerando dos sistemas físicos simples: una partícula libre bidimensional y una partícula interactuando con el campo gravitacional terrestre. Los correspondientes cálculos y la estructura y desarrollo generales presentados en este artículo son ofrecidos en el siguiente orden: En la subsección 1.1 revisamos brevemente algunos conceptos y propiedades relacionados con el propagador de acuerdo con el postulado de Feynman; en la Sec. 2 definimos la aproximación en términos de polinomios; en la Sec. 3 presentamos los cálculos correspondientes al caso de una partícula libre bidimensional, incluyendo una subsección dedicada a la verificación de la consistencia física de los resultados preliminares; en la Sec. 4 presentamos de manera resumida los resultados obtenidos para el caso de una partícula en el campo gravitacional terrestre, en la Sec. 5 presentamos las conclusiones y posteriormente los Apéndices.

1.1 El propagador de Feynman

Consideremos un sistema cuántico (unidimensional) preparado de tal manera que en un cierto instante T_0 el estado correspondiente está correctamente representado por una función de onda Ψ_{T_0}, un estado puro. A ese sistema físico le corresponderá, en un instante posterior T y como consecuencia de su evolución dinámica, una nueva función de onda Ψ_T, la misma que, de acuerdo con la mecánica cuántica, puede obtenerse como resultado de la aplicación del respectivo propagador sobre la función de onda inicial:

$$\Psi_T = K(T, T_0)\Psi_{T_0}\ , \qquad T > T_0. \tag{1}$$

En la ecuación anterior podemos interpretar el $K(T, T_0)$, que es conocido, como una matríz continua, con elementos $K(x, T; x_0, T_0)$, y las funciones Ψ_{T_0} y Ψ_T como vectores columna continuos, con elementos $\Psi_{T_0}(x_0)$ y $\Psi_T(x)$, respectivamente. Los elementos del vector Ψ_T, en la Ec. (1), quedan definidos de la manera usual, a través de la integral (que es lo que corresponde en este caso) de productos de elementos de la matríz por elementos del vector:

$$\Psi_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 K(x, T; x_0, T_0)\Psi_{T_0}(x_0). \tag{2}$$

De otro lado, Feynman, en su formulación de la mecánica cuántica no relativista [1], postuló que el propagador entre dos puntos espacio-tiempo extremos y fijos, (x_0, T_0) y (x, T), puede ser construido a través de una cierta suma sobre todos los posibles caminos q continuos y con derivada continua, que son superinfinitos, que conecten dichos puntos:

$$K(x, T; x_0, T_0) = \sum_q e^{i\mathcal{S}(x,x_0;q)/\hbar}. \tag{3}$$

En la suma anterior cada una de las exponenciales complejas es, a la vez, un vector unitario en el plano complejo (aquí conviene tratarlos de esa manera), y donde la respectiva fase está definida por el valor de la funcional de acción sobre el camino considerado, $\mathcal{S}(x, x_0; q) \equiv \mathcal{S}(q)$, y por la constante de Planck, $\hbar$, cuyo valor pequeñísimo tiene aquí un papel fundamental. La suma en la Ec. (3) tiene una propiedad interesante, y para apreciarla vamos a suponer que q es un camino cualquiera considerado en esa suma. Como justificaremos más adelante, es posible encontrar otro camino, $\tilde{q}$, de manera que se cumple la siguiente relación: $\mathcal{S}(\tilde{q}) \approx \mathcal{S}(q) + \pi\hbar$, entonces los correspondientes vectores $e^{i\mathcal{S}(x,x_0;q)/\hbar}$ y $e^{i\mathcal{S}(x,x_0;\tilde{q})/\hbar}$ satizfacen la relación

$$e^{i\mathcal{S}(q)/\hbar} + e^{i\mathcal{S}(\tilde{q})/\hbar} \approx \mathbf{0}. \tag{4}$$

El resultado anterior, en general, es válido para todos los caminos q (y para sus pares $\tilde{q}$) que estén “alejados” del camino extremal, es decir, del camino clásicamente recorrido, q_c, y es una consecuencia que proviene, en última instancia, del enorme valor de $1/\hbar$ y de su efecto sobre las distintas fases; tal valor es muchísimo mayor que todos los posibles valores de la acción. Por lo tanto, si tomamos como referencia el valor de la fase para un cierto camino q_1, también alejado de una vecindad de q_c, el vector correspondiente al término definido por q, dará “muchas vueltas” en el plano complejo y puede terminar en cualquier lugar, porque su fase será muy diferente de la de referencia, inclusive si el valor correspondiente de su acción casi no se diferencie del valor de la acción calculado para el camino q_1. Dicho de otra manera, existe una distribución casi homogénea para todas esas posiciones angulares donde puedan terminar los vectores correspondientes a los caminos fuera de una vecindad del camino clásico; por ello, la mayoría de los caminos “alejados” del camino extremal tienden a neutralizarse entre sí. Además, debido al hecho de que la acción tiene un valor extremal sobre el camino clásico, los vectores definidos por caminos que pertenezcan a una vecindad de q_c producirán un vector de mayor magnitud, de manera que una buena aproximación a la suma en la Ec. (3) se obtiene sumando solamente los infinitos caminos de la vecindad de q_c considerada. Es decir, tenemos la siguiente situación:

$$\sum_q e^{i\mathcal{S}(q)/\hbar} \quad \approx \quad \sum_{q\in V_c} e^{i\mathcal{S}(q')/\hbar} \tag{5}$$

donde $q \in V_c$ representa, justamente, a las curvas en una vecindad de q_c. Para nosotros, esta propiedad tiene una importancia fundamental dentro del contexto de lo que vamos a realizar: la representación de los caminos por polinomios. Esa importancia será claramente puesta en evidencia en los párrafos que siguen a las Ecs. (14) y (15) de la Sec. 2. Por otro lado, las contribuciones de los caminos “alejados” del camino extremal a la suma en la Ec. (3), a través de sumas como las dadas por la Ec. (4), son, para cada par de caminos q y $\tilde{q}$, muy pequeñas, pero no nulas, y van acumulándose; sin embargo, al considerar a todos esos caminos y promediarlos tal contribución tiende a cero.

Terminamos esta sección revisando dos propiedades básicas que todo propagador satisface:

(1) Un propagador de evolución temporal, por su propio significado, tiene una propiedad del tipo “producto de propagadores”, pues la evolución entre dos instantes t_2 y t_0, puede ser considerado como pasando a través de un instante intermedio t_1, $t_0 < t_1 < t_2$. Entonces escribimos,

$$K_{t_2,t_1}.K_{t_1,t_0} = K_{t_2,t_0}, \qquad t_0 < t_1 < t_2, \tag{6}$$

o para los elementos de esas matrices,

$$K(t_2, x_2; t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 K(t_2, x_2; t_1, x_1) K(t_1, x_1; t_0, x_0). \tag{7}$$

(2) Otra propiedad importante de un propagador es su comportamiento como una delta de Dirac en el límite cuando $t \to t_0$. Entonces, podemos escribir,

$$K(t, x; t_0, x_0) \to \delta(x - x_0), \quad \text{para} \quad t \to t_0, \tag{8}$$

o en forma explícita,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \left(\lim_{t\to t_0} K(t, x; t_0, x_0) \right) \Psi_{t_0}(x_0) = \Psi_{t_0}(x). \tag{9}$$

2 Una aproximación a través de polinomios

En esta sección establecemos una aproximación específica para los caminos en términos de polinomios, lo que se sustenta por uno de los teoremas de Weierstrass, [6], que a continuación revisamos.

Teorema (de la aproximación) de Weierstrass. Supongamos que ϕ representa una función real y continua definida sobre un intervalo $[a,b]$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, puede definirse un polinomio $P_\epsilon(z)$ de manera que en cada punto de dicho intervalo satisfaga la siguiente relación:

$$| \phi(z) - P_\epsilon(z) | < \epsilon \tag{10}$$

Un ejemplo donde esta aproximación es empleada es el de los polinomios de Bernstein, $B_n(z)$, de grado n, [7], definidos de la siguiente manera:

$$B_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \phi\Big(\frac{j}{n}\Big) \frac{n!}{j!(n-j)!} z^j (1-z)^{n-j}. \tag{11}$$

Es evidente que estos polinomios quedarán bien definidos solamente si los valores de la función ϕ son conocidos explícitamente; en nuestra aproximación no necesitamos ese tipo de información.

Habiendo llegado a este punto ya disponemos de conceptos y herramientas suficientes para dar sentido y establecer concretamente una aproximación para los "caminos de Feynman" en términos de polinomios y, aprovechando este contexto, hacer un importante comentario sobre una limitación asociada con una aproximación de esta naturaleza. Veamos pues. Para el cálculo del propagador consideramos la aproximación definida por los siguientes polinomios de grado n en $(t - T_0)/(T - T_0)$:

$$X(\vec{\alpha}, t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^k, \tag{12}$$

$$Y(\vec{\beta}, t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^k, \tag{13}$$

donde $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n)$ son vectores de $n+1$ componentes reales. Así, dado un camino q, las expresiones (12) y (13) representan, con valores particulares para cada α_k, β_k, con $k \in \{0, ..., n\}$, las ecuaciones paramétricas de la misma; entonces, cuando estos coeficientes tomen valores en el conjunto de números reales $\mathbf{R}$, podemos generar un conjunto de caminos y serán éstos los que consideraremos en el cálculo del propagador. En otras palabras, cada par de vectores $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ define un camino, de manera que, en principio, tenemos $2n+2$ variables (hasta aquí no hemos considerado las condiciones en los puntos extremos); entonces, en lugar de trabajar con la funcional $\mathcal{S} : \{q\} \to \mathbf{R}$, lo hacemos con la función $S : \mathbf{R}^{2n+2} \to \mathbf{R}$, de modo que

$$S(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \approx \mathcal{S}(q). \tag{14}$$

Ahora veamos el segundo asunto. Sea $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, y q un camino cualquiera que pertenece a lo que llamaremos una $\epsilon-$vecindad del camino clásico; por ello queremos decir que el camino q y su derivada con relación al tiempo, q', satisfacen la siguiente desigualdad:

$$| q(t) - q_c(t) | + | q'(t) - q'_c(t) | \leq \epsilon , \quad \forall t \in [T_0, T]. \tag{15}$$

Entonces, los polinomios pueden cumplir $|q(t) - q_c(t)| \leq \epsilon$, pero no necesariamente $|q'(t) - q'_c(t)| \leq \epsilon$; es más o menos el caso de una curva "en diente de sierra" casi coincidente con q_c. Es decir, el teorema de Weierstrass solo no va a ser suficiente para representar a todos los posibles "caminos de Feynman", que son superinfinitos. Sin embargo, la aproximación polinomial es válida y, con ciertos cuidados, podemos representar un número infinito de caminos por polinomios, y eso será suficiente para lo que queremos, pues ello es compatible con lo que nos dice la propiedad representada en la Ec. (5). Como veremos, en las Secs. 3 y 4, esto nos llevará a expresiones aproximadas para los propagadores de dos sistemas simples (una partícula libre bidimensional y una partícula interactuando con el campo gravitacional terrestre) que resultan ser iguales a las expresiones exactas de los propagadores correspondientes multiplicadas por un factor numérico dependiente de n.

3 El caso de una partícula libre bidimensional

Haciendo uso de las condiciones en los puntos extremos fijos, para todo $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ y $T > T_0$, tenemos

$$X(\vec{\alpha}, T_0) = x_0, \qquad X(\vec{\alpha}, T) = x, \tag{16}$$

$$Y(\vec{\beta}, T_0) = y_0, \qquad Y(\vec{\beta}, T) = y, \tag{17}$$

después de imponer estas condiciones sobre los caminos, en nuestro caso sobre los polinomios $X(\vec{\alpha}, t)$ e $Y(\vec{\beta}, t)$, sólo quedarán $2n-2$ variables independientes. Escogemos los coeficientes $\alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_2, ..., \beta_n$, como las variables libres. Podemos escribir,

$$X(\vec{\alpha}, t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^k, \tag{18}$$

con

$$\alpha_0 = x_0, \qquad \alpha_1 = x - x_0 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \tag{19}$$

y también

$$Y(\vec{\beta}, t) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^k \tag{20}$$

siendo

$$\beta_0 = y_0, \qquad \beta_1 = y - y_0 - \sum_{k=2}^{n} \beta_k \tag{21}$$

Usando las Ecs.(12) y (13) obtenemos la función lagrangiana para la partícula libre:

$$L(\vec{\alpha},\vec{\beta},t)=\frac{m}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)=\frac{m}{2(T-T_0)^2}$$
$$\times\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}kl(\alpha_k\alpha_l+\beta_k\beta_l)\left(\frac{t-T_0}{T-T_0}\right)^{k+l-2} \qquad (22)$$

y para la acción

$$S(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\int_{T_0}^{T}L(\vec{\alpha},\vec{\beta},t)dt=\frac{m}{2(T-T_0)}$$
$$\times\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\frac{kl}{k+l-1})(\alpha_k\alpha_l+\beta_k\beta_l). \qquad (23)$$

Con esto último hemos determinado una función que correspondería formalmente a la acción de la partícula libre, falta verificar si ella la representa correctamente. A continuación veremos ese asunto.

3.1 ¿La función S tiene un valor mínimo para el camino clásico?

Para averiguarlo consideramos los polinomios dados en las Ecs. (18) y (20),

$$X(\vec{\alpha},t)=x_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\frac{t-T_0}{T-T_0}\right)^k,$$
$$Y(\vec{\beta},t)=y_0+\sum_{k=1}^{n}\beta_k\left(\frac{t-T_0}{T-T_0}\right)^k, \qquad (24)$$

y tomamos en cuenta las siguientes ligaduras:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-(x-x_0)=0, \qquad \sum_{k=1}^{n}\beta_k-(y-y_0)=0, \quad (25)$$

las mismas que son incluidas en la función extendida S^*:

$$S^*(\vec{\alpha},\vec{\beta},p,q)=S(\vec{\alpha},\vec{\beta})+p\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-(x-x_0)\right)$$
$$+\ q\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k-(y-y_0)\right), \qquad (26)$$

donde *todas* las variables α_k y β_k, con $k\in\{1,...,n\}$, son consideradas independientes y p y q son ciertos parámetros (conocidos como los multiplicadores de Lagrange). A continuación, consideremos las ecuaciones

$$\frac{\partial S^*}{\partial\alpha_\sigma}=0, \quad \sigma=1,...,n, \qquad (27)$$

a partir de las cuales podemos escribir explícitamente

$$\frac{m}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\frac{kl}{k+l-1})\alpha_k\delta_{l,\sigma}$$
$$+\frac{m}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\frac{kl}{k+l-1})\alpha_l\delta_{k,\sigma}+p=0, \qquad (28)$$

donde el símbolo $\delta_{l,\sigma}$ representa a la delta de Kronecker (igual a 1, cuando l es igual a σ; e igual a 0, cuando l es diferente de σ). En la Ec. (28) ambas sumas sobre dos índices son iguales, lo que puede ser verificado intercambiando k por l, y viceversa, en una de las sumas; entonces, luego de realizar la suma sobre uno de los índices, obtenemos,

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{l\sigma}{\sigma+l-1}\right)\alpha_l+\frac{p}{m}(T-T_0)=0,$$
$$\sigma=1,...,n. \qquad (29)$$

Podemos considerar $\sigma=1$, entonces obtenemos

$$\frac{p}{m}(T-T_0)=-(x-x_0), \qquad (30)$$

y con eso conseguimos

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\sigma l}{\sigma+l-1}\right)\alpha_l=x-x_0, \quad \sigma=2,...,n. \qquad (31)$$

Ahora podemos hacer uso explícito del resultado de que una de las variables α_k depende de las otras[i]; consideremos que esa variable es α_1, dada por la Ec. (19). Así obtenemos,

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k\sigma}{k+\sigma-1}-1\right)\alpha_k=0, \quad \sigma=2,...,n \qquad (32)$$

que en forma compacta representa un conjunto de $n-1$ ecuaciones algebraicas independientes para $n-1$ variables α_k, con $k\in\{2,...,n\}$, el cual puede ser resuelto después de que el valor de n sea fijado. Para proseguir daremos un valor concreto a n, que por simplicidad será igual a $n=3$. Entonces obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$2\alpha_2+3\alpha_3=0\ , \qquad 5\alpha_2+8\alpha_3=0, \qquad (33)$$

de donde obtenemos $\alpha_2=\alpha_3=0$. Usando estos valores en la Ec. (19), obtenemos

$$\alpha_1=x-x_0. \qquad (34)$$

Por analogía se obtiene, para los correspondientes coeficientes del polinomio $Y(\beta,t)$, $\beta_2=\beta_3=0$, y $\beta_1=y-y_0$. Todos estos coeficientes definen un polinomio (y un camino) concreto que da a la función S el valor mínimo. Veremos ahora que ese camino es, justamente, el camino clásico.

Con los resultados encontrados podemos escribir

$$X(t)-x_0=\frac{(x-x_0)}{(T-T_0)}(t-T_0), \qquad (35)$$

y por analogía tenemos

$$Y(t)-y_0=\frac{(y-y_0)}{(T-T_0)}(t-T_0); \tag{36}$$

resultados que pueden ser escritos en forma conjunta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X(t)-x_0&=\frac{(x-x_0)}{(y-y_0)}\frac{(y-y_0)}{(T-T_0)}(t-T_0)\\ &=\frac{(x-x_0)}{(y-y_0)}(Y(t)-y_0), \end{aligned} \tag{37}$$

que representa una línea recta que pasa por el punto $\vec{x}_0=(x_0,y_0)$, en el instante T_0, y por el punto $\vec{x}=(x,y)$, en el instante T. Esta ecuación representa el camino clásico (de acuerdo con las condiciones de contorno consideradas) para una partícula libre y da un sustento adicional a nuestra aproximación en el proceso de construcción del propagador.

3.2 Calculando $K_{0,n}$

A continuación consideraremos únicamente una de las sumas sobre dos índices en la Ec. (23); aquella correspondiente a los términos $\alpha_k\alpha_l$, y la desarrollamos parcialmente de manera que la nueva suma sea únicamente sobre las variables independientes α_k, con $k\in\{2,...,n\}$. Entonces tenemos

$$J(\vec{\alpha})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\frac{kl}{k+l-1})\alpha_k\alpha_l, \tag{38}$$

con esto reescribimos la acción de la siguiente manera:

$$S(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{m}{2(T-T_0)}\Big(J(\vec{\alpha})+J(\vec{\beta})\Big). \tag{39}$$

Usando la Ec. (19), $\alpha_1=x-x_0-\sum_{k=2}^{n}\alpha_k$, desarrollamos la suma sobre dos índices para el valor $k=l=1$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} J(\vec{\alpha})&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{n}(\frac{kl}{k+l-1})\alpha_k\alpha_l+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\alpha_1\\ &=\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}(\frac{kl}{k+l-1}-1)\alpha_k\alpha_l+(x-x_0)^2. \end{aligned} \tag{40}$$

Ahora, la acción puede ser reescrita únicamente en términos de las variables independientes:

$$\begin{aligned} S(\vec{\alpha},\vec{\beta})&=\frac{m}{2(T-T_0)}\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{kl}{k+l-1}-1\right)\\ &\times(\alpha_k\alpha_l+\beta_k\beta_l)+\frac{m}{2}\left(\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{T-T_0}\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Es conveniente realizar algunas simplificaciones en esta expresión. Para ello, representamos por $A(k,l,\lambda)$, con $2\le\lambda<n$, al coeficiente correspondiente al término $\alpha_k\alpha_l$ cuando, en la suma sobre dos índices anterior, ambos índices tengan a λ como su valor inicial; esto es, escribiremos

$$\sum_{k=\lambda}^{n}\sum_{l=\lambda}^{n}A(k,l,\lambda)\alpha_k\alpha_l. \tag{42}$$

A continuación desarrollamos parcialmente la suma anterior (para el primer valor de sus índices) buscando identificar alguna propiedad que nos permita simplificarla. Así tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k=\lambda}^{n}\sum_{l=\lambda}^{n}A(k,l,\lambda)\alpha_k\alpha_l\\ &=\sum_{k=\lambda+1}^{n}\sum_{l=\lambda+1}^{n}A(k,l,\lambda)\alpha_k\alpha_l+A(\lambda,\lambda,\lambda){\alpha_\lambda}^2\\ &+\sum_{k=\lambda+1}^{n}\Big(A(k,\lambda,\lambda)+A(\lambda,k,\lambda)\Big)\alpha_k\alpha_\lambda. \end{aligned} \tag{43}$$

Ahora, supongamos que $A(k,l,\lambda)=A(l,k,\lambda)$, $\forall\lambda$. Entonces, después de completar cuadrados para α_λ, obtenemos una propiedad importante,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=\lambda}^{n}\sum_{l=\lambda}^{n}A(k,l,\lambda)\alpha_k\alpha_l\\ &=\sum_{k=\lambda+1}^{n}\sum_{l=\lambda+1}^{n}A(k,l,\lambda+1)\alpha_k\alpha_l\\ &+A(\lambda,\lambda,\lambda)(\alpha_\lambda+\vartheta_\lambda)^2, \end{aligned} \tag{44}$$

donde

$$A(k,l,\lambda+1)=A(k,l,\lambda)-\frac{A(k,\lambda,\lambda)A(l,\lambda,\lambda)}{A(\lambda,\lambda,\lambda)} \tag{45}$$

y

$$\vartheta_\lambda=\frac{1}{A(\lambda,\lambda,\lambda)}\sum_{k=\lambda+1}^{n}A(k,\lambda,\lambda)\alpha_k, \tag{46}$$

de donde directamente vemos que

$$A(k,l,\lambda+1)=A(l,k,\lambda\ +1);$$

es decir, los coeficientes A son invariantes frente a un intercambio de los índices k,l, independientemente del valor de λ. Ahora, considerando que

$$A(k,l,2)=kl/(k+l-1)=A(l,k,2),$$

la suposición que realizamos previamente sobre el coeficiente $A(k,l,\lambda)$ está justificada. Entonces, después de aplicar repetidamente el resultado de la Ec. (44), obtenemos,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}A(k,l,2)\alpha_k\alpha_l=\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{n}A(k,l,3)\alpha_k\alpha_l\\ &+A(2,2,2)(\alpha_2+\vartheta_2)^2=\sum_{k=n}^{n}\sum_{l=n}^{n}A(k,l,n)\alpha_k\alpha_l\\ &+A(n-1,n-1,n-1)(\alpha_{n-1}+\vartheta_{n-1})^2+\dots\\ &+A(3,3,3)(\alpha_3+\vartheta_3)^2+A(2,2,2)(\alpha_2+\vartheta_2)^2, \end{aligned} \tag{47}$$

o, en forma compacta,

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n} A(k,l,2)\alpha_k\alpha_l = \sum_{\sigma=2}^{n} A(\sigma,\sigma,\sigma)(\alpha_\sigma+\vartheta_\sigma)^2, \quad (48)$$

con $\vartheta_n = 0$. Reemplazando este resultado en la Ec. (40) obtenemos

$$J(\vec{\alpha}) = \sum_{\sigma=2}^{n} A(\sigma,\sigma,\sigma)(\alpha_\sigma+\vartheta_\sigma)^2 + (x-x_0)^2. \quad (49)$$

De una manera similar, obtenemos para $J(\vec{\beta})$:

$$J(\vec{\beta}) = \sum_{\sigma=2}^{n} B(\sigma,\sigma,\sigma)(\beta_\sigma+\varepsilon_\sigma)^2 + (y-y_0)^2, \quad (50)$$

con $\varepsilon_n = 0$, y siendo $A(\sigma,\sigma,\sigma) = B(\sigma,\sigma,\sigma)$, con $\sigma \in \{2,...,n\}$, tenemos que la acción adquiere la forma

$$S(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{m}{2(T-T_0)}\sum_{\sigma=2}^{n} A(\sigma,\sigma,\sigma) \times \left[(\alpha_\sigma+\vartheta_\sigma)^2 + (\beta_\sigma+\varepsilon_\sigma)^2\right] + \frac{m}{2}\left(\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{T-T_0}\right), \quad (51)$$

la cual, al ser comparada con la Ec. (41), es claramente más adecuada para el cálculo de las integrales que definirán al propagador.

A continuación determinaremos el valor del coeficiente $A(\sigma,\sigma,\sigma)$. Tenemos

$$A(k,l,2) = \frac{kl}{k+l-1} - 1 = \frac{(k-1)(l-1)}{k+l-1} \quad (52)$$

$$A(k,l,3) = A(k,l,2) - \frac{A(k,2,2)A(l,2,2)}{A(2,2,2)} = \frac{(k-1)(l-1)(k-2)(l-2)}{(k+l-1)(k+1)(l+1)}. \quad (53)$$

Generalizando obtenemos,

$$A(k,l,\lambda) = \frac{(k-1)!(l-1)!k!l!}{(k+l-1)(k-\lambda)!(l-\lambda)!(k+\lambda-2)!(l+\lambda-2)!}, \quad (54)$$

lo que puede ser demostrado usando el método de inducción matemática. De esta manera encontramos la siguiente expresión:

$$A(\sigma,\sigma,\sigma) = \frac{(2\sigma-1)(\sigma!)^4}{(2\sigma-1)!^2(\sigma)^2}. \quad (55)$$

Finalmente, la acción queda expresada como

$$S(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{m}{2(T-T_0)}\sum_{\sigma=2}^{n}\frac{(2\sigma-1)(\sigma!)^4}{(2\sigma-1)!^2(\sigma)^2} \times \left((\alpha_\sigma+\vartheta_\sigma)^2 + (\beta_\sigma+\varepsilon_\sigma)^2\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{T-T_0}\right). \quad (56)$$

Ahora, recordando lo que fue comentado sobre el propagador en la Sec. 2 y de acuerdo con nuestra aproximación, tenemos

$$K_{0,n}(T,T_0) = \sum_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} e^{iS(\vec{\alpha},\vec{\beta},T,T_0)/\hbar}, \quad (57)$$

con las condiciones en los puntos extremos

$$X(\vec{\alpha},T_0) = x_0, \qquad X(\vec{\alpha},T) = x, \quad (58)$$

$$Y(\vec{\beta},T_0) = y_0, \qquad Y(\vec{\beta},T) = y. \quad (59)$$

Siguiendo la formulación de Feynman debemos sumar exponenciales complejas sobre todas los caminos continuamente diferenciables (en nuestro caso los vectores $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$) que satisfacen las condiciones consideradas en los puntos extremos fijos; entonces, ya que cada una de las componentes de los vectors $\vec{\alpha}$ o $\vec{\beta}$ pueden variar independientemente de los otros, tomando valores numéricos reales, la suma anterior es equivalente, en nuestro caso, a integrar sobre todas esas componentes independientes de los vectores. Adicionalmente, debemos introducir un factor de normalización que, en este caso, podría tener relación unicamente con la multiplicidad de los caminos y no más para garantizar la existencia de algún límite temporal, como ocurre en el procedimiento formal, a causa de que en esta aproximación no tenemos necesidad de considerar ninguna partición del intervalo de tiempo considerado[ii]. Así tenemos,

$$K_{0,n}((x,y),T;(x_0,y_0),T_0) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha_2}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha_3}{A}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha_n}{A}\frac{1}{A} \times \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\beta_2}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\beta_3}{A}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\beta_n}{A}e^{(i/\hbar)S(\vec{\alpha},\vec{\beta})}, \quad (60)$$

o de manera compacta

$$K_{0,n}((x,y),T;(x_0,y_0),T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{\sigma=2}^{n}\frac{d\alpha_\sigma}{A^n}\frac{d\beta_\sigma}{A^n}e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{\alpha},\vec{\beta})}, \quad (61)$$

donde, como en el cálculo formal, el coeficiente viene dado por la expresión

$$A = \left(\frac{2i\pi\hbar(T - T_0)}{m} \right)^{1/2}, \tag{62}$$

con la diferencia de que aquí interviene unicamente el intervalo de tiempo considerado, $(T - T_0)$, y no su partición, $\epsilon = (T - T_0)/N$. Entonces, usando la expresión encontrada para la acción, Ec. (56), y haciendo el cambio de variable: $\Theta_\sigma = \alpha_\sigma + \vartheta_\sigma$, obtenemos

$$K_{0,n} = \left(\prod_{\sigma=2}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Theta_\sigma}{A^n} e^{\left(im/(2\hbar(T-T_0))\right) A(\sigma,\sigma,\sigma)\Theta_\sigma{}^2} \right)^2$$
$$\times e^{(im/2\hbar)\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)/(T-T_0)}. \tag{63}$$

Ahora vamos a concentrarnos en las integrales

$$I = \prod_{\sigma=2}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Theta_\sigma}{A^n} e^{\left(im/(2\hbar(T-T_0))\right) A(\sigma,\sigma,\sigma)\Theta_\sigma{}^2}, \tag{64}$$

las cuales pueden ser calculadas a partir del siguiente resultado:

$$\int_0^{+\infty} e^{-iax^n} dx = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{n})}{(ia)^{1/n}} \; ; \quad n \in \mathbf{Z}^+. \tag{65}$$

(Para detalles vea el Apéndice A) el cual tiene como caso particular, para $n = 2$, la siguiente igualdad:

$$\int_0^{+\infty} e^{-iax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{ia}} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}. \tag{66}$$

Entonces, usando la Ec. (66) en la Ec. (64), obtenemos

$$I = \frac{1}{A^n} \left(\frac{2i\pi\hbar(T - T_0)}{m} \right)^{(n-1)/2}$$
$$\times \prod_{\sigma=2}^{n} \left(\frac{1}{A(\sigma,\sigma,\sigma)} \right)^{1/2}, \tag{67}$$

y reemplazando en la ecuación anterior los resultados dados en la Ec. (55) y la Ec. (62) llegamos al siguiente resultado:

$$I = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(T - T_0)}} \times \prod_{\sigma=2}^{n} \left(\frac{(2\sigma - 1)!^2(\sigma)^2}{(2\sigma - 1)(\sigma!)^4} \right)^{1/2}. \tag{68}$$

Por lo tanto, haciendo las sustituciones en la Ec. (63), llegamos al siguiente resultado para el propagador de la partícula libre:

$$K_{0,n}(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0) = \prod_{\sigma=2}^{n} \frac{(2\sigma-1)!^2(\sigma)^2}{(2\sigma-1)(\sigma!)^4} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar(T-T_0)} \right)$$
$$\times e^{(im/2\hbar)\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)/(T-T_0)}. \tag{69}$$

Es decir, excepto por un factor numérico constante que depende solamente del grado de los polinomios considerados, obtenemos la expresión correcta para el propagador de la partícula libre, $K_0(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0)$, [1]:

$$K_{0,n}(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0) = \left(\prod_{\sigma=2}^{n} \frac{(2\sigma - 1)!^2(\sigma)^2}{(2\sigma - 1)(\sigma!)^4} \right)$$
$$\times K_0(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0). \tag{70}$$

4 Una partícula en el campo gravitacional terrestre

Habiendo mostrado en la sección anterior todos los cálculos necesarios para construir el propagador de Feynman de la partícula libre de acuerdo con nuestra aproximación, ahora mostraremos sólo los resultados principales obtenidos en el caso de una partícula interactuando con el campo gravitacional terrestre. Tenemos el lagrangiano,

$$L(\vec{\alpha},\vec{\beta},t) = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - mgY \tag{71}$$

el mismo que, después de hacer uso de las Ecs. (12) y (13), adquiere el aspecto

$$L(\vec{\alpha},\vec{\beta},t) = \frac{m}{2(T - T_0)^2} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} kl(\alpha_k\alpha_l + \beta_k\beta_l)$$
$$\times \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^{k+l-2} - mg \sum_{k=1}^{n} \beta_k$$
$$\times \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^{k} - mgy_0. \tag{72}$$

Así, la acción se puede escribir de la siguiente manera:

$$S(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{m}{2(T - T_0)} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{kl}{k + l - 1} \right)(\alpha_k\alpha_l + \beta_k\beta_l)$$
$$- mg(T - T_0) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k + 1} \right)\beta_k - mgy_0(T - T_0). \tag{73}$$

Esta función representa correctamente a la acción del sistema considerado; para ver ello, consideremos las expresiones

$$X(\vec{\alpha},t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^k,$$
$$Y(\vec{\beta},t) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right)^k, \tag{74}$$

y polinomios de grado $n = 2$, con lo cual se puede verificar que los correspondientes coeficientes tienen los valores

$$\alpha_1 = x - x_0, \qquad \beta_1 = y - y_0 + \frac{g(T-T_0)^2}{2},$$
$$\alpha_2 = 0, \qquad \beta_2 = -\frac{g(T-T_0)^2}{2}, \tag{75}$$

que dan a la función S el valor mínimo y que corresponden a un camino definido por las expresiones

$$X(t) - x_0 = \frac{(x-x_0)}{(T-T_0)}(t-T_0), \tag{76}$$

$$Y(t) - y_0 = \left(\frac{y-y_0}{T-T_0} + \frac{g}{2}(T-T_0)\right) \times (t-T_0) - \frac{g}{2}(t-T_0)^2, \tag{77}$$

las cuales definen el camino clásico recorrido por una partícula en el campo gravitacional terrestre. Notar que el coeficiente al frente del factor $(t - T_0)$ es una constante y tiene unidades de velocidad.

Continuando con los cálculos, vemos que la acción dada por la Ec. (73), al ser expresada únicamente en términos de las variables independientes, adquiere el aspecto

$$S(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{m}{2(T-T_0)} \sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{kl}{k+l-1}-1\right)\alpha_k\alpha_l + \frac{m}{2(T-T_0)}\left(\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{kl}{k+l-1}-1\right)\beta_k\beta_l + \sum_{k=2}^{n} g\left(\frac{k-1}{k+1}\right)(T-T_0)^2\beta_k\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{T-T_0} - g(y+y_0)(T-T_0)\right). \tag{78}$$

Ahora denotamos por $A'(k,l,\lambda)$ y $B'(k,\lambda)$, con $2\leq\lambda<n$, a los coeficientes en las sumas sobre dos índices y sobre un índice, respectivamente, que aparecen en la acción anterior, donde surgen las siguientes relaciones recurrentes:

$$A'(k,l,\lambda+1) = A'(k,l,\lambda) - \frac{A'(k,\lambda,\lambda)A'(\lambda,l,\lambda)}{A'(\lambda,\lambda,\lambda)} \tag{79}$$

y

$$B'(k,\lambda+1) = B'(k,\lambda) - \frac{B'(\lambda,\lambda)}{2A'(\lambda,\lambda,\lambda)} \times \Big(A'(\lambda,k,\lambda) + A'(k,\lambda,\lambda)\Big), \tag{80}$$

donde los coeficientes, para $\lambda = 2$, son iguales a

$$A'(k,l,2) = \frac{kl}{k+l-1} - 1,$$
$$B'(k,2) = g\left(\frac{k-1}{k+1}\right)(T-T_0)^2, \tag{81}$$

con lo cual la acción $S(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ adquiere el aspecto

$$\frac{m}{2(T-T_0)}\sum_{\lambda=2}^{n} A(\lambda,\lambda,\lambda)(\alpha_\lambda+\eta_\lambda)^2 + \frac{m}{2(T-T_0)} \times \sum_{\lambda=2}^{n} A'(\lambda,\lambda,\lambda)(\beta_\lambda+\epsilon_\lambda)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{T-T_0} - g(y+y_0)(T-T_0) - \frac{1}{12}g^2(T-T_0)^3\right); \tag{82}$$

estando η_λ y ϵ_λ, para $2 \leq \lambda < n$, definidos similarmente a como se lo hizo en la Ec. (46), y $\eta_n = \epsilon_n = 0$. Tomando en consideración el factor de normalización, dado en la Ec. (62), encontramos la siguiente expresión para el propagador:

$$K_{G,n}(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0) = \left(\prod_{\sigma=2}^{n}\frac{(2\sigma-1)!^2\sigma^2}{(2\sigma-1)(\sigma!)^4}\right) \times \left(\frac{m}{2i\pi\hbar(T-T_0)}\right)\exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{T-T_0} - g(y+y_0)(T-T_0) - \frac{1}{12}g^2(T-T_0)^3\right]\right\} \tag{83}$$

y, como antes, salvo por un factor numérico dependiente únicamente de n, obtenemos la expresión exacta del propagador para una partícula de masa m en el campo gravitacional terrestre, $K_G(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0)$ [9]:

$$K_{G,n}(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0) = \left(\prod_{\sigma=2}^{n}\frac{(2\sigma-1)!^2(\sigma)^2}{(2\sigma-1)(\sigma!)^4}\right) \times K_G(T,\vec{x};T_0,\vec{x}_0). \tag{84}$$

Los resultados encontrados muestran que los propagadores aproximados por los polinomios, Ecs. (69) y (83), son proporcionales a los respectivos propagadores exactos, Ecs. (70) y (84), donde los coeficientes de proporcionalidad, que son iguales, dependen solamente de n. ¿Por qué son iguales esos coeficientes? Esto es una consecuencia matemática que proviene de (i) la igualdad de otros coeficientes, aquellos en los términos cuadráticos de la acción de ambos sistemas físicos, y (ii) de que las integrales, en la última etapa del cálculo del propagador, contienen exponenciales (complejas) cuádraticas, donde sólo intervienen, justamente, los coeficientes de los términos cuadráticos de las acciones, pero ninguno de los coeficientes del término lineal de la acción correspondiente a la partícula en un campo gravitacional. Puede mostrarse (ver Apéndice B) que ese coeficiente dependiente de n está acotado por: $\sqrt{\pi}(\prod_{\sigma=2}^{n}\sigma^{4(\sigma-1)})/2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

5 Conclusión

En este artículo hemos usado el postulado de suma sobre caminos de Feynman para calcular el propagador cuántico en dos situaciones simples: para una partícula libre en dos dimensiones espaciales y para una partícula en el campo gravitacional terrestre, considerando una aproximación polinomial para los caminos que es consistente con uno de los teoremas de Weierstrass. En el caso de la partícula libre fueron presentados cálculos detallados y algunas verificaciones posibilitaron apreciar la consistencia física de los resultados parciales. Los correspondientes resultados para los propagadores son dados en las Ecs. (69) y (83) y muestran que, a excepción de un factor numérico constante dependiente del grado de los polinomios considerados, coinciden con las expresiones correctas correspondientes a esos sistemas físicos. En relación directa con la aproximación que hemos considerado, ésta ha traído algunas simplificaciones importantes:

(i) no hemos necesitado trabajar con las correspondientes funcionales, en vez de ello lo hicimos con funciones reales;

(ii) no necesitamos conocer explícitamente los valores de las funciones correspondientes a los caminos, como sí sería el caso si considerásemos otros polinomios, como los de Bernstein; y

(iii) no se necesita realizar ninguna partición del intervalo de tiempo, ni considerar el proceso de límite correspondiente, como es realizado en el procedimiento formal; sin embargo, esta aproximación tiene también desventajas, como la imposibilidad de representar apropiadamente a todos los posibles caminos. Otros métodos de cálculo del propagador de Feynman pueden ser encontrados en la Ref. 11. Por otro lado, debido a que en el presente método hacemos uso de herramientas matemáticas que son conocidas por los estudiantes desde los cursos generales de la carrera profesional de física, nos parece posible que una presentación introductoria sobre el propagador de Feynman, basada en esta aproximación, puede ser hecha en un primer curso de mecánica cuántica. Aproximaciones de este tipo para otros propagadores cuánticos nos parece un buen ejercicio.

Agradecimientos

El autor agradece al Prof. Holger G. Valqui (UNI, Lima) por los comentarios y por las aclaraciones, ofrecidas en su debido momento, sobre los conceptos y los métodos de las integrales de camino; a la Profa. Maria Carolina Nemes (UFMG, Belo Horizonte) por los comentarios realizados y a la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, FAPEMIG, Brasil, por el apoyo financiero.

Apéndice A

Consideremos, por conveniencia, una curva cerrada $\mathcal{C}$ en el (primer cuadrante del) plano complejo, formada por tres curvas:

(i) un segmento de recta, $\mathcal{C}_1$, sobre la dirección horizontal, con un extremo en el origen y de longitud R;

(ii) un arco de circunferencia, $\mathcal{C}_2$, de radio R y

(iii) un segmento de recta, $\mathcal{C}_3$, con dirección radial, que va desde el extremo de $\mathcal{C}_2$ hasta el origen definiendo de esa manera un ángulo central agudo σ. Sobre la curva cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ calcularemos la siguiente integral:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} e^{-iaz^n} dz, \tag{85}$$

entonces tenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{-iaz^n} dz = \int_{\mathcal{C}_1} e^{-iax^n} dx + \int_{\mathcal{C}_2} e^{-iaz^n} dz + \int_{\mathcal{C}_3} e^{-iaz^n} dz. \tag{86}$$

Sobre $\mathcal{C}_2$, con $z = Re^{i\theta}$, donde R es fijo y θ variable, obtenemos $dz = iRe^{i\theta} d\theta$; mientras que sobre $\mathcal{C}_3$, con $z = re^{i\theta}$, siendo θ fijo (e igual a σ) y r variable, obtenemos $dz = e^{i\sigma} dr$; y usando el teorema del residuo [7], tenemos,

$$\int_0^R e^{-iax^n} dx + iR \int_0^\sigma e^{-iaR^n e^{in\theta}} e^{i\theta} d\theta - e^{i\sigma} \int_0^R e^{-iar^n e^{in\sigma}} dr = 0, \tag{87}$$

pues no hay singularidades dentro en la región encerrada por $\mathcal{C}$. Como se demuestra en los cursos sobre los conceptos y las herramientas para resolver integrales en el plano complejo [7], en el límite cuando $R \to \infty$, las integrales del tipo como aquella evaluada sobre $\mathcal{C}_2$ tienden a cero. Entonces tenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-iax^n} dx = e^{i\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-iar^n e^{in\sigma}} dz. \tag{88}$$

En cálculos con integrales complejas no solamente las curvas (sobre las cuales se ha de integrar) deben ser elegidas convenientemente, sino también los valores de los parámetros que carcterizan dicha curva. Aquí el ángulo σ es uno de esos parámetros, que tiene un valor fijo, pero arbitrario. A partir de la Ec. (88) vemos que conviene imponer: $n\sigma = -\pi/2$. Con ello tenemos,

$$\int_0^{+\infty} e^{-iax^n} dx = e^{-i\pi/2n} \int_0^{+\infty} e^{-ar^n} dr, \tag{89}$$

y así podemos aprovechar el siguiente resultado:

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^n} dy = \Gamma(1 + \frac{1}{n}), \tag{90}$$

el cual, como se sabe, puede ser obtenido a partir de

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

$\forall p > 0$, donde Γ es la funcion gamma. Entonces conviene reescribir la segunda integral en la Ec. (89),

$$e^{-i\pi/2n} \int_0^{+\infty} e^{-ar^n} dr = \frac{e^{-i\pi/2n}}{\sqrt[n]{a}} \int_0^{+\infty} e^{-y^n} dy, \tag{91}$$

donde hemos hecho el siguiente cambio de variable: $y = a^{1/n} r$. Por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-iax^n} dx = \frac{e^{-i\pi/2n}}{\sqrt[n]{a}} \Gamma(1 + \frac{1}{n}). \tag{92}$$

Finalmente, es fácil mostrar que $e^{-i\pi/2n} = i^{-1/n}$. Así llegamos al resultado

$$\int_0^{+\infty} e^{-iax^n} dx = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt[n]{ia}} \tag{93}$$

Apéndice B

Hagamos uso del siguiente resultado [10]:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n \geq 2, \tag{94}$$

entonces obtenemos

$$\frac{(2\sigma - 1)!^2 (\sigma)^2}{(2\sigma - 1)(\sigma!)^4} < \frac{(\sigma)^{4\sigma-2} (\sigma)^2}{(2\sigma - 1)(\sigma!)^4} < \frac{\sigma^{4\sigma}}{(2\sigma - 1)\sigma^4}$$
$$= \frac{\sigma^{4(\sigma-1)}}{(2\sigma - 1)} \Longrightarrow \prod_{\sigma=2}^{n} \frac{(2\sigma - 1)!^2 (\sigma)^2}{(2\sigma - 1)(\sigma!)^4} < \frac{\prod_{\sigma=2}^{n} \sigma^{4(\sigma-1)}}{\prod_{\sigma=2}^{n} (2\sigma - 1)}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \prod_{\sigma=2}^{n} \sigma^{4(\sigma-1)}. \tag{95}$$

$*$. Dirección actual: Observatorio Nacional, COGE, Rua General José Cristino, 77, São Cristóvão, Rio de Janeiro - CEP: 20291-400, RJ. Brasil.

i. Lo que es verdad para las variables de la función S, pero no para las de la función S^*.

ii. En la Ref. 8 la integral de Feynman es definida a través del uso de herramientas matemáticas especiales evitando con ellas el procedimiento de límite.

1. R.P. Feynman y A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw Hill, New York, 1965).
2. L.M. Brown, ed., *Feynman's Thesis - A New Approach to Quantum Theory* (World Scientific, Singapore, 2005).
3. A.H. Castro Neto y A.O. Caldeira, *Phys. Rev. Lett.*, **46** (1991) 1960.
4. A.O. Caldeira y A.J. Leggett, *Physica A* **121** (1983) 587.
5. O.Barut y S. Basri, *Am. J. Phys.*, **60**(10) (1992) 896.
6. E.Butkov, *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1968).
7. G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials* (University of Toronto Press, Toronto, 1953).
8. C.M. DeWitt, *Commun. Math. Phys.* **28** (1972) 47.
9. B.R. Holstein, *Am. J. Phys.*, **65** (1997) 414.
10. P.P. Korovkin, *Desigualdades, Lecciones populares de matemáticas*, (Editorial Mir, Moscú, 1976).
11. F.A. Barone, H. Boschi-Filho y C. Farina, *Am. J. Phys.*, **71** (2003) 483.